

112年公務人員特種考試關務人員、身心障礙人員考試及
112年國軍上校以上軍官轉任公務人員考試試題

考試別：身心障礙人員考試

等別：三等考試

類科：電力工程

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、試利用拉氏轉換（Laplace transform）求解：（25分）

$$y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} 10 \sin 2t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} ; \quad y(0) = 1, y'(0) = -5,$$

$$\text{其中 } y' \triangleq \frac{dy}{dt}, \quad y'' \triangleq \frac{d^2y}{dt^2}。$$

二、令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。

(一)求 A 的反矩陣 A^{-1} (inverse matrix of A)。(5分)

(二)求 A 的所有特徵值 (eigenvalues)。(6分)

(三)求矩陣 P 與 D ，使得 $D = P^{-1}AP$ 為一對角矩陣 (diagonal matrix)。(8分)

(四)求 A^{13} 。(6分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：4309

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 求解線性方程組： $x+y+z=3$ 與 $x+2y-z=4$ 之未知數 x, y 與 z 。下列敘述何者錯誤？
 - (A)該線性方程組有無限多組解
 - (B) $[x, y, z]^T=[2, 1, 0]^T$ 為該線性方程組之一組解
 - (C) $[x, y, z]^T=[-1, 3, 1]^T$ 為該線性方程組之一組解
 - (D)該線性方程組解集合之維度是 2
- 2 矩陣 $M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ，其中 $A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 。則 $\text{rank}(M)$ 為何？
 - (A) 1
 - (B) 2
 - (C) 3
 - (D) 4
- 3 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ 。下列敘述何者錯誤？
 - (A)矩陣 A 之反矩陣是 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3.5 & -1.5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
 - (B)假定 b 為 $[0, 0]^T$ ，求解方程組 $Ax=b$ 時，未知數 x 有唯一解
 - (C)矩陣 A 為滿秩 (Full Rank)
 - (D)向量 $[1, 1]^T$ 是矩陣 A 之特徵向量
- 4 T 為 R^3 到 R^2 的線性轉換，滿足 $T(x, y, z) = (2x, y - z)$ 。則 T 的核空間 (kernel space) 維度為何？
 - (A) 1
 - (B) 2
 - (C) 3
 - (D) 4
- 5 $S = \text{span}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ 為 R^4 的子空間，則向量 $u = (1, 1, 3, 5)$ 和 S 的最短距離為何？
 - (A) 5
 - (B) $\sqrt{10}$
 - (C) 3
 - (D) $\sqrt{2}$
- 6 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$ ， B 為 A 的相似 (similar) 矩陣。則 $\det(AB)$ 為何？
 - (A) 2
 - (B) 3
 - (C) 6
 - (D) 9
- 7 若矩陣 A 的特徵值 (eigenvalues) 為 $-3, 1, 2$ 。則 $\det(A^2 + 3A + 2I)$ 為何？
 - (A) 144
 - (B) 86
 - (C) -88
 - (D) -144

- 8 假設 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$ 。 A^∞ 為何？
 (A) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$
- 9 考慮複變函數 $\cos(z)$ ，其實部為 $u(x,y)$ ，虛部為 $v(x,y)$ 且 $z = x+iy$ 。關於 $\cos(z)$ 敘述，下列何者正確？
 (A) $\frac{d}{dz} \cos(z) = \sin(z)$ (B) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
 (C) $u(x,y) = \cos(x)(e^y - e^{-y})$ (D) $v(x,y) = \sin(x)(e^y - e^{-y})$
- 10 複數 $z = x+iy$ 滿足 $e^{2z+\ln(2)} = 1+i$ ，則 z 為下列何者？
 (A) $z = -\frac{1}{2} \ln(2) + i\frac{\pi}{4}$ (B) $z = \frac{1}{2} \ln(2) + i\frac{\pi}{4}$
 (C) $z = -\frac{1}{4} \ln(2) + i\frac{\pi}{8}$ (D) $z = \frac{1}{4} \ln(2) + i\frac{\pi}{8}$
- 11 試求出 $\int_C (1-z) dz$ ，其中 C 由以下曲線決定： $z(t) = t-it^2$ ，而 t 由 0 變化到 1。
 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) i
- 12 求複變函數積分 $\oint_C \frac{e^{iz} \sin(z)}{z^2+i6z} dz$ ，其中積分路徑 C 為逆時鐘方向繞圓 $|z-3i|=2$ 。
 (A) 0 (B) $i\pi$ (C) $i2\pi$ (D) $-i2\pi$
- 13 考慮以下微分方程式 $y'' - 2y = x^2 - 1$ 。下列敘述何者錯誤？
 (A) 該微分方程式有唯一解
 (B) 該微分方程式之通解為 $y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - 0.5x^2$
 (C) 假設 $y(1) = 3$ 且 $y'(1) = -5$ ， $c_1 = \frac{e^{-\sqrt{2}}(7\sqrt{2}/2-4)}{2\sqrt{2}}$ ， $c_2 = \frac{e^{\sqrt{2}}(7\sqrt{2}/2+4)}{2\sqrt{2}}$
 (D) 該微分方程式是二階微分方程式
- 14 考慮微分方程式 $(2x^1y-9)dx + (3-6xy^1)dy = 0$ 。下列那一個積分因子 (integrating factor) 可將上述微分方程式轉換為正合 (exact) 微分方程式？
 (A) xy (B) x^2y (C) xy^2 (D) x^2y^2
- 15 微分方程式 $y' + xy = 0$ 的級數解為 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ， $a_0 \neq 0$ 。對 $n = 1, 2, 3, \dots$ ， a_n 滿足下列那一個關係式？
 (A) $a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} a_n$ (B) $a_{n+1} = -\frac{1}{n} a_n$
 (C) $a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} a_{n-1}$ (D) $a_{n+1} = -\frac{1}{n} a_{n-1}$
- 16 假設 $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ t-5, & t \geq 5 \end{cases}$ 。 $g(t)$ 之拉式轉換 (Laplace Transform) 為何？
 (A) $\frac{e^{-5s}}{s}$ (B) $\frac{e^{-5s}}{s^2}$ (C) $\frac{e^{5s}}{s^2}$ (D) $\frac{e^{5s}}{s}$

- 17 設 $f(x)$ 在 $-L < x < L$ 的傅立葉級數 (Fourier series) 為 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(Ax) + b_n \sin(Ax))$ ，下列敘述何者正確？
- (A) $f(x)$ 為偶函數 (even function)， $a_0 = 0$
(B) $f(x)$ 為奇函數 (odd function)， $b_n = 0$
(C) $A = \frac{2n\pi}{L}$
(D) $f(x)$ 為奇函數，級數在 $x = L$ 的左極限 (left-hand limit) 收斂到零
- 18 某實驗樣本有 30% 的人抽菸，而這些抽菸人口中有肺癌的比率為 40%，而 70% 未抽菸的人口，有肺癌的比率為 10%。若由此實驗樣本中抽查一人，已知抽到的人沒有肺癌，而此人沒有抽菸的機率為何？
- (A) 7/9 (B) 8/9 (C) 7/8 (D) 6/7
- 19 捷運每間隔 A 分鐘發車。定義隨機變數 X 為等車時間，其機率分配為 $[0, A]$ 區間的均勻分配 (uniform distribution)。若民眾希望等車時間介於 2~4 分鐘的機率為 0.4，則發車時間 A 為何？
- (A) 10 (B) 6 (C) 5 (D) 4
- 20 隨機變數 X 的變異數 (variance) 等於 1。若 $Y = -4X + 1$ ，則 X 和 Y 的共變異數 (covariance) 為何？
- (A) 1 (B) 4 (C) -2 (D) -4