

109年專門職業及技術人員高等考試建築師、32類科技師
(含第二次食品技師)、大地工程技師考試分階段考試
(第二階段考試)暨普通考試不動產經紀人、記帳士考試、
109年第二次專門職業及技術人員特種考試驗光人員考試試題

等 別：高等考試
類 科：資訊技師
科 目：計算機數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、請用數學歸納法證明，對所有的正整數 n 滿足下列性質。(10分)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

二、計算下列算式之值。(10分)

$$\sum_{i=0}^{100} C(100, i)(-2)^i, \text{ 其中 } C(100, i) \text{ 為 } 100 \text{ 個取 } i \text{ 個的組合。}$$

三、有 5 個不同的盒子分別標示號碼為 15, 17, 19, 21, 23，現有 100 個相同的球放入此 5 個盒子中，若要求放入盒子中的球的個數不得少於此盒子標示的號碼，請問共有多少種不同放置球的方法？請說明答案理由。(10分)

四、求出下列遞迴關係式的一段式。(10分)

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 3$$

五、若字串為三個字母 X、Y、Z 組成， a_n 代表長度為 $n(n > 0)$ ，且不包含連續兩個 X 的字串總數，請計算 a_1 、 a_2 ？給出 a_n 的線性遞迴關係式 (Linear Recurrence Relation)。(10分)

六、假設 $Q(x)$ 代表敘述「 x 未通過測試」， $R(x)$ 代表敘述「 x 讀了很多書」，請用邏輯敘述表示「若每個人都讀了很多書，則每人都會通過考試」。(10分)

七、給一個無向圖 (Undirected graph) $G=(V, E)$ ， G 是尤拉圖 (Euler graph) 的條件為何？請敘述理由。若 G 為一二分圖 (Bipartite Graph) 的條件為何？請敘述理由。(10分)

八、從 52 張撲克牌中，任選 4 張牌出來，此 4 張牌中至少有 3 張牌是相同花色的機率是多少？答案僅需列出最後計算公式，不需要算出最後結果。(10分)

九、任給一長度為 20 的二位元字串 s (Binary String)，隨機變數 X 定義為 $X(s)$ 是字串 s 中 0 出現的個數加上 2 倍的 1 出現的個數之和，請計算 $E[X]$ 及 $\text{Var}[X]$ ，其中 $E[X]$ 為期望值， $\text{Var}[X]$ 為變異數。(10 分)

十、若 X 為一連續隨機變數定義如下：

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2(2x + \frac{3}{2}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若隨機變數 $Y = \frac{2}{X} + 3$ ，請計算 $\text{Var}[Y]$ ，其中 $\text{Var}[Y]$ 為變異數。(10 分)