108年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求通解（general solution）為 $c_1e^x + c_2xe^x + x^2e^x$ 的二次微分方程式，其中 c_1 及 c_2 為任意常數。（10 分）

二、求週期為 $2T$ 的函數，$f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x/T), & 0\le x<T\\ 0, & T\le x<2T\end{cases}$，且 $f(x+2T) = f(x)$ 拉普拉斯轉換（Laplace transform）。（15 分）

三、若 $\cos(3+i2)=a+ib$，求 a 及 b。（5 分）

四、求 $\oint_\gamma \frac{z}{(z+2)(z-4i)}dz$，其中 γ 為 $|z|=5$ 的圓。（10 分）

五、$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ 及 $B=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$，求 x，使得 $\|Ax-B\|$ 最小（least square solution）。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　　　　　　　代號：7340

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令 $\boldsymbol{u}$ = **i**-**j**-**k**；$\boldsymbol{v}$ = -3**i**+4**j**+6**k**；$\boldsymbol{w}$ = -2**i**-4**j**+2**k**，則由 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{w}$ 所形成的平行立方體（parallelepiped）體積為何？

(A) 9　(B) $9\sqrt{2}$　(C) 18　(D) $18\sqrt{2}$

2　$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 3\end{bmatrix}$，試問 $\forall x\in \mathrm{R}^3$，$\dfrac{x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x}{x^{\mathrm{T}}x}$ 之最大值為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

3　令矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 10 & -10\\ 10 & 5 & -20\\ 5 & -5 & -10\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}a & b & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & c\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 為一 3×3 對角矩陣（diagonal matrix），下列敘述何者正確？

(A) $a+b+c=5$　(B) $a\times b\times c=4$　(C) $a-b-c=0$　(D) $\dfrac{a\times b}{c}=1$

4　已知 **A** 為 $m\times n$ 矩陣且 rank(**A**)=r，下列敘述何者正確？

(A) **Ax=0** 的解空間（solution space）維度（dimension）為 $m-r$

(B)若 $m=n=r$ 且 **x** 為 $n\times 1$ 未知矩陣，則 **Ax=0** 存在唯一解

(C)若 $m=n=r$，則 **A** 的列向量（row vector）彼此間都是線性相依（linear independent）

(D)若 $m>n>r$，則 **A** 的列向量（row vector）彼此間都是線性獨立（linear dependent）

5　求矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ 有幾個線性獨立之特徵向量？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

6　$A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，令 $e^A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$，則 $a_{11}+a_{22}=$ ？

(A) $e-e^2$　(B) $e+e^2$　(C) $-e+e^2$　(D) $2e-e^2$

7　下列何者為 $(-64)^{\frac{1}{4}}$ 的複數根？

(A) $-1-i$　(B) $-2-i$　(C) $-1-2i$　(D) $-2-2i$

8　$\ln\left(1-i\sqrt{3}\right)=$ ？

(A) $2+i\left(-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數　(B) $2+i\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數

(C) $2+i\left(\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數　(D) $2+i\left(\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$，其中 n 為任意整數

9　求 $\int_{\varphi} z^2 dz$，沿著路徑 $\varphi=t+it$，$0\le t\le 2$ 積分之值：

(A) $\dfrac{32}{3}(i-1)$　(B) $\dfrac{16}{3}(i-1)$　(C) $\dfrac{8}{3}(i-1)$　(D) $\dfrac{4}{3}(i-1)$

10　假設 $f(\mathrm{z})=\dfrac{1}{z}$，求 $\oint_C f(z)dz$ 之值，C 為 $|z-2|=1$ 之逆時針之圓周。

(A) 0　(B) $2\pi i$　(C) $-2\pi i$　(D) $4\pi i$

11　假設 $k_1e^{ax}+k_2e^{bx}+e^{cx}$ 為微分方程式 $y''-6y'+8y=3e^x$ 的解，則 $a+b+c$ 為何？

(A)-6　(B)-4　(C) 7　(D) 9

12 假設路徑 C 是一逆時針的正方形，其各邊位於直線 $x=\pm 2$ 和 $y=\pm 2$ 之上。試求出 $\int_C \frac{e^{-z}}{z-\left(\pi i/2\right)}dz$ 值為何？

(A) 2π　(B) π　(C) $-\pi i$　(D) 1

13 給定一組微分方程式 $x_1'=-x_2$, $x_2'=1.01x_1-0.2x_2$ ，起始值為 $x_1(0)=0, x_2(0)=-1$，則 $\lim_{t\to+\infty} x_2(t)=$ ？

(A)-1　(B) 0　(C) 1　(D)無窮大

14 令 $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2\left(s^2+1\right)}$ ，試求 $F(s)$之反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform） $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ ？

(A) $1-\sin(t)+\cos(t),\quad t>0$
(B) $t+\sin(t)-\cos(t),\quad t>0$
(C) $1+t-\sin(t)-\cos(t),\quad t>0$
(D) $1+t+\sin(t)+\cos(t),\quad t>0$

15 下列何者為偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 的解？以下 c_1, c_2, α 為常數。

(A) $u(x,y)=c_1e^K\cos 2\alpha x+c_2e^K\sin 2\alpha x$ ，其中 $\mathrm{K}=a^2y$
(B) $u(x,y)=c_1e^K\cosh 2\alpha x+c_2e^K\sinh 2\alpha x$ ，其中 $\mathrm{K}=a^2y$
(C) $u(x,y)=c_1e^T\cos 2\alpha y+c_2e^T\sin 2\alpha y$ ，其中 $\mathrm{T}=a^2x$
(D) $u(x,y)=c_1e^T\cosh 2\alpha y+c_2e^T\sinh 2\alpha y$ ，其中 $\mathrm{T}=a^2x$

16 求 $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)$ 之反拉普拉斯轉換為下列何者？

(A) $-2e^{-t}+t+2$　(B) $-2e^{-t}-t+2$　(C) $-2e^{-t}+t-2$　(D) $-2e^{-t}-t-2$

17 已知函數 $x(t)$ 其傅立葉轉換為 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ 且 $|X(j\omega)|=2(u(\omega+3)-u(\omega-3))$ ， $\measuredangle X(j\omega)=-\dfrac{3}{2}\omega+\pi$ ，其中方程式 $\begin{cases}u(\omega)=1, \omega\geq 0\\ u(\omega)=0, \omega<0\end{cases}$ ，請問 t 為下列何者時，$x(t)$=0？

(A) $\dfrac{1}{2}+\pi$　(B) $1+\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{\pi}{3}$　(D) $2+\dfrac{\pi}{4}$

18 一個盒子中有 30 顆 IC，劣品比率為 1/6，在某次實驗中取了 10 顆 IC，試問此次實驗所用的 IC 都是良品的機率為何？

(A) $\dfrac{C_0^2C_{10}^{28}}{C_{10}^{30}}$　(B) $\dfrac{C_0^5C_{10}^{25}}{C_{10}^{30}}$　(C) $\dfrac{C_0^6C_{10}^{24}}{C_{10}^{30}}$　(D) $\dfrac{C_0^{10}C_{10}^{20}}{C_{10}^{30}}$

19 給定一個連續隨機變數 X，其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$ ，試問一個隨機變數 $Y=3X-2$ ，則此隨機變數 Y 的變異數（variance） σ_Y^2 為何？

(A) 18　(B) 36　(C) 64　(D) 144

20 設有一連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ，求其期望值。

(A) 1　(B) 2/3　(C) 3/4　(D) 4/5