

106年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員
等別：三等考試
類科組：電子組（選試英文）
科目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、設
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(一)試求矩陣 \mathbf{A} 特徵值？（5分）

(二)試求矩陣 \mathbf{A} 特徵向量？（5分）

(三)試求
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$
？（5分）

二、請證明 $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x+y, x-y, z)$ 是線性轉換 (linear transformation)。(10分)

三、已知 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在整個複數 $z = x + iy$ 平面可解析，同時 $f(0) = 0$ 且

$u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 。求 $f(z)$ 。(10分)

四、求下列微分方程式的通解： $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x^2 + 1, x > 0$ (其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}, y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$)。
(15分)

7 求複變函數 $W = \sqrt[4]{5+5i}$ 之所有根 (root) ?

(A) $W_0 = \sqrt[8]{50}e^{i(\pi/16)}$, $W_1 = \sqrt[8]{50}e^{i(9\pi/16)}$, $W_2 = \sqrt[8]{50}e^{i(17\pi/16)}$, $W_3 = \sqrt[8]{50}e^{i(25\pi/16)}$

(B) $W_0 = \sqrt[4]{50}e^{i(\pi/16)}$, $W_1 = \sqrt[4]{50}e^{i(9\pi/16)}$, $W_2 = \sqrt[4]{50}e^{i(17\pi/16)}$, $W_3 = \sqrt[4]{50}e^{i(25\pi/16)}$

(C) $W_0 = \sqrt[4]{50}e^{i(\pi/8)}$, $W_1 = \sqrt[4]{50}e^{i(2\pi/8)}$, $W_2 = \sqrt[4]{50}e^{i(3\pi/8)}$, $W_3 = \sqrt[4]{50}e^{i(4\pi/8)}$

(D) $W_0 = \sqrt[8]{50}e^{i(\pi/4)}$, $W_1 = \sqrt[8]{50}e^{i(2\pi/4)}$, $W_2 = \sqrt[8]{50}e^{i(3\pi/4)}$, $W_3 = \sqrt[8]{50}e^{i(4\pi/4)}$

8 求 $\int_0^\pi \frac{d\theta}{4-\cos\theta}$ 之積分值：

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{4}}$

(B) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

(C) $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$

(D) $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$

9 求 $\frac{1}{z+z^2}$ 在 $z=0$ 之留數 (residue) 之值為何？

(A) 0.5

(B) 1

(C) 2

(D) 3

10 下列何者不為「尤拉-柯西」方程式 (Euler-Cauchy Equation) ?

(A) $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$, $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$

(B) $x^2y'' + 23y = 0$, $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$

(C) $y'' + xy' + x^2y = 0$, $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$

(D) $x''y^2 + 9x'y - 5x = 0$, $(x' = \frac{dx}{dy}, x'' = \frac{d^2x}{dy^2})$

11 設微分方程式 $x''(t) + 4x(t) = \sin 3t$ 的解 $x(t)$ 經過拉普拉斯 (Laplace) 轉換後為 $X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$ ，下列何者為正確之初始條件？

(A) $x(0) = 1, x'(0) = 0$

(B) $x(0) = 0, x'(0) = 0$

(C) $x(0) = 0, x'(0) = -1$

(D) $x(0) = 0, x'(0) = 1$

12 下列敘述何者正確？

(A) $x^2y'' + 4xy' + 4y = 0$ 的通解為 $(c_1+c_2x)e^{-2x}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

(B) $x^2y'' + 4xy' + 4y = 0$ 的通解為 $(c_1+c_2 \ln x)x^{-2}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

(C) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ 的通解為 $(c_1+c_2 \ln x)x^{-2}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

(D) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ 的通解為 $\left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right) e^{-\frac{5}{2}x}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

13 已知 $y'' - 6y' + 5y = 4e^{2t}$ ，下列何者可為此微分方程式的解？

- (A) $y = 2e^t + 3e^{5t}$ (B) $y = 2e^{2t} + 3e^{5t}$ (C) $y = 3e^t + 3e^{5t}$ (D) $y = 3e^{2t} + 3e^{5t}$

14 如以對中心點 $x = 0$ 展開之 Frobenius 數列方式求解 $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$ ，則其所得到的指示方程式 (Indicial equation) 為何？

- (A) $r^2 - 2 = 0$ (B) $r^2 - r - 2 = 0$ (C) $r^2 + 2r - 2 = 0$ (D) $r^2 + r - 1 = 0$

15 設微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ ， $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = y'_0$ 的級數解 (series solution) 為 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (2x)^n}{n!}$ ，試求常數 a 、 b 、 y_0 及 y'_0 之值，並判定下列何者正確？

- (A) $a+b+y_0+y'_0 = 1$ (B) $a+b+y_0+y'_0 = 2$ (C) $a+b+y_0+y'_0 = 3$ (D) $a+b+y_0+y'_0 = 4$

16 將週期函數 $f(t) = t$ ， $-\pi \leq t < \pi$ ，週期為 2π ，展開成傅立葉複係數級數：

- (A) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$ (B) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} e^{int}$ (C) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} (-1)^n e^{int}$ (D) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} (-1)^{n+1} e^{int}$

17 假設 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier Transform) 式為 $F(\omega)$ ，試求 $f(3t)$ 的傅立葉轉換為：

- (A) $\frac{1}{3} F\left(\frac{\omega}{3}\right)$ (B) $3F(3\omega)$ (C) $F\left(\frac{\omega}{3}\right)$ (D) $F(3\omega)$

18 假設阿里山森林保護區共有 10 位職員，其中需要 5 位職員負責巡邏森林，2 位職員在辦公室裡負責行政事務，而其他 3 位職員支援嘉義市，試問：此 10 位職員被分為這 3 組的方法有多少種？

- (A) 2520 (B) 1260 (C) 840 (D) 630

19 連續隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數為 (joint probability density function)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y, & \text{if } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

試問下列何者正確？

- (A) $E[XY] = \frac{5}{8}$ (B) $E[XY] = \frac{4}{3}$ (C) $E[XY] = 1$ (D) $E[XY] = 5/6$

20 假定 X 為一隨機變數，其機率密度函數 (density function) 為 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left(-\frac{(x+3)^2}{32}\right)$ ， $-\infty < x < \infty$ ，求其期望值 $E(X)$ 為何？

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3