

代號：25720  
|  
25920  
28320  
頁次：4-1

# 106年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、計算  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  最小平方問題 (least square problem)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  的解。(10 分)

二、矩陣  $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  :

(一)求  $M$  之特徵值 (eigenvalue)。(5 分)

(二)求矩陣  $P$  以滿足  $P^{-1}MP$  為對角矩陣 (diagonal matrix)。(5 分)

(三)求  $M^4$ 。(5 分)

三、設微分方程式  $y'' + ay' + by = -65\sin 2t$ ， $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = y'_0$  的解  $y(t)$  的拉普拉斯轉

換為  $Y(s) = \frac{13s^3 + 45s^2 + 52s + 50}{s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$ 。

(一)求常數  $a$ 、 $b$ 、 $y_0$  及  $y'_0$  之值。(8 分)

(二)求微分方程式的解  $y(t)$ 。(7 分)

四、每一次白努利試驗 (Bernoulli trials) 中，成功之機率為  $p$ ，失敗之機率為  $q = 1 - p$ ，

則代表在  $n$  次獨立試驗中成功次數的二項式隨機變數  $x$ ，其機率分布

$F(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$ ， $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。若  $F(x)$  在  $x = x_0$  處有極大值， $x_0$  之值為何？

(10 分)



6  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，設  $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ ，試求  $f(A)$  為何？

(A)  $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$     (B)  $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$     (C)  $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$     (D)  $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7  $i = \sqrt{-1}$ ，展開複數函數  $f(z) = \cosh(5 - 2i)$  為：

(A)  $f(z) = \cosh 5 \cosh 2 - i \sinh 5 \sinh 2$     (B)  $f(z) = \cosh 5 \cos 2 - i \sinh 5 \sin 2$   
 (C)  $f(z) = \cos 5 \cosh 2 - \sin 5 \sinh 2$     (D)  $f(z) = \cos 5 \cos 2 - i \sin 5 \sin 2$

8  $i = \sqrt{-1}$ ， $i^{1+i} = ?$

(A)  $\sqrt{2}(1+i)$     (B)  $\sqrt{2}(1-i)$   
 (C)  $ie^{-(2n\pi + \pi/2)}$ ， $n$  為任意整數    (D)  $i^{\sqrt{2}}e^{2n\pi - \pi/2}$ ， $n$  為任意整數

9 假設  $C$  為  $|Z| = 3$  之逆時針方向的圓周，求  $\oint_C \frac{e^{3Z}}{Z^4} dZ = ?$  ( $i = \sqrt{-1}$ )

(A)  $4\pi i$     (B)  $\pi i$     (C)  $9\pi i$     (D)  $-2\pi i$

10 假設微分方程式  $y' + 4y = \cos t$  且  $y(0) = 0$ ，下列何函數不會出現在  $y(t)$  的解之中？

(A)  $e^{-4t}$     (B)  $\cos t$     (C)  $\sin t$     (D)  $e^{-t}$

11  $y'' - 3y' - 4y = 8x^2$ ， $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$ ，其中  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ， $y' = \frac{dy}{dx}$ ，則  $y''(0) = ?$

(A) 10    (B) 6    (C) 4    (D) 0

12 設微分方程式  $xy'' + 2y' = 6x$ ，且  $y(1) = 1$ ， $y'(1) = 2$ ，則下列何者正確？

(A)  $y(2) = 2$     (B)  $y(-1) = -1$     (C)  $y'(2) = -2$     (D)  $y'(-1) = -2$

13 設  $x(t)$  為  $\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = 6$  之解，則  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  之值為何？

(A)  $\infty$     (B) 6    (C) 0    (D) -2

14  $z$  為複數 (Complex variable)，則  $\int_0^{1+i} z^2 dz = ?$  ( $i = \sqrt{-1}$ )

(A)  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$     (B)  $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$     (C)  $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$     (D)  $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$

15 試求冪級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$  之收斂半徑。

- (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

16 求  $\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$  之反拉普拉斯轉換。

- (A)  $\frac{\sinh(t)}{t}$  (B)  $\frac{2\sinh(t)}{t}$  (C)  $\frac{\sinh(t)}{2t}$  (D)  $\frac{2\sin(t)}{t}$

17 求  $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$  ,  $f(x+4) = f(x)$  , 週期  $p=4$  之傅立葉級數 (Fourier series) 。

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} - \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} + \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$   
(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} - \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\cos n\pi/2}{n\pi} + \frac{4\sin(n\pi/2)}{(n\pi)^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$

18 給定一個隨機變數  $x$  , 其累積分布函數 (cumulative distribution function)  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 3 \\ 1/2, & 3 \leq x < 5 \\ 3/4, & 5 \leq x < 7 \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$  , 求機率

$P(x \leq 5 | x \geq 2)$  之值為何?

- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$

19 假設產品是否為不良品是互相獨立的事件。已知某公司所生產之手機的不良率為 1% , 若此公司以 10 台手機為一包裝銷售 , 且保證 10 台手機中最多只有 1 台不良品 , 否則就退貨。試求賣出包裝好的產品中退貨的比例為多少? 提示:  $(0.99)^9 \approx 0.9135$  。

- (A)0.2% (B)0.4% (C)0.6% (D)0.8%

20 設隨機變數 (random variable)  $X$  和  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/24, & 0 < x < 6 \text{ 且 } 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  , 則  $E[X^2Y^2]$  之值為何? 其中  $E[Z]$  定義為隨機變數  $Z$  的期望值。

- (A)8 (B)16 (C)32 (D)64