

等 別：三等考試

類 科：電力工程

科 目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、給定三個點的直角座標為 $P_1(1,1,1)$ ， $P_2(2,3,4)$ ， $P_3(3,0,-1)$ ，原點為 $O(0,0,0)$ 。

(一)求三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 之面積？(5分)

(二)求以三個向量 $\overrightarrow{OP_1}$ ， $\overrightarrow{OP_2}$ ， $\overrightarrow{OP_3}$ 為邊所展開的平行六面體之體積？(5分)

二、給定一積分式 $\int_C (y + yz)dx + (x + 3z^3 + xz)dy + (9yz^2 + xy - 1)dz$ 。

(一)證明該積分式之解答與積分路徑 C 無關。(4分)

(二)求該積分式之不定積分解答？(4分)

(三)若積分路徑 C 之起點為 $(1,1,1)$ 、終點為 $(2,1,4)$ ，求該積分式之數值結果為何？(2分)

三、求 $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ 在下列不同區間的 Laurent series 展開式：

(一) $0 < |z-1| < 2$ 。(5分)

(二) $0 < |z-3| < 2$ 。(5分)

四、給定線性微分方程組：

$$\frac{dx}{dt} = -4x + y + z,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 5y - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = y - 3z,$$

該方程組可表示為矩陣形式 $\frac{du}{dt} = Au$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(一)求矩陣 A 之特徵值及對應的特徵向量？(6分)

(二)將該方程組之解用上述之特徵值及特徵向量表示。(4分)

五、計算下列機率分布函數之平均值 μ (mean) 及方差 σ^2 (variance)。

(一) 二項式機率分布 $b(k; n, p) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$; $0 < p < 1, 0 \leq k \leq n$ 。(5分)

(二) Poisson 機率分布 $p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; $k = 0, 1, 2, \dots$ 。(5分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7339

(一) 本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二) 共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列向量集合何者為線性相依 (linearly dependent) ? (選項中 T 代表轉置 (Transpose))

(A) $\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$

(B) $\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T\}$

(C) $\{(1,2,4)^T, (2,1,3)^T, (4,-1,1)^T\}$

(D) $\{(1,2,4)^T, (2,1,3)^T\}$

2 試問向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 於一子空間 $\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ 之正交投影 (orthogonal projection) 向量為何?

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{-1}{6} \\ \frac{6}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{6}{6} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{-11}{6} \\ \frac{6}{6} \\ \frac{19}{6} \\ \frac{6}{6} \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{6}{6} \\ \frac{-5}{6} \\ \frac{6}{6} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{-2}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{6}{6} \\ \frac{-19}{6} \\ \frac{6}{6} \end{bmatrix}$

3 假設 $A \in R^{3 \times 3}$, $B \in R^{3 \times 3}$, 且 I 為三階單位矩陣, 已知 $|A| = -4$, $|B| = 6$, 請問 $\begin{vmatrix} A^{-1} & B^2 & AB \\ 0 & 2I & A^2 \\ 0 & 0 & A^T B \end{vmatrix} = ?$

(A) 12

(B) 48

(C) 192

(D) 768

4 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos x \sin x & \cos^2 x & \sin x \\ -\cos x & \sin x & 0 \\ -\sin^2 x & -\cos x \sin x & \cos x \end{bmatrix}$, 則下列何者正確?

(A) A 為正交矩陣 (orthogonal matrix)

(B) A 的反矩陣不存在

(C) A 的行列式值 $|A| = 2$

(D) A 為奇異矩陣 (singular matrix)

5 $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 9 & 11 & 15 \\ 4 & 12 & 24 & 28 \end{bmatrix}$, 求 $\text{rank}(A) = ?$

(A) 3

(B) 4

(C) 1

(D) 2

- 14 求 $x^2 y' + xy = -y^{-\frac{3}{2}}$ 之通解？（選項中 c 為任意常數）
- (A) $x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3} x^2 y = c$ (B) $x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}} = c$ (C) $x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{3} x^{\frac{3}{2}} y = c$ (D) $x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{3} x^{\frac{3}{2}} = c$
- 15 求偏微分方程式 $u_{xy} - 2u_x = 0$ 之解？（選項中 $k_1(y)$ 為 y 的函數， $k_2(x)$ 為 x 的函數）
- (A) $u(x, y) = e^{-2y} \int f(x) dx + k_1(y)$ (B) $u(x, y) = e^{2y} \int f(x) dx + k_1(y)$
(C) $u(x, y) = e^{-2x} \int f(y) dy + k_2(x)$ (D) $u(x, y) = e^{2x} \int f(y) dy + k_2(x)$
- 16 給定一偏微分方程式為 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x$ ，且 $u(0, y) = 0$ ， $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = x^2$ ，試問當 $x=1$ ， $y=0$ 時， $u(x, y) = ?$
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$
- 17 令 $y(t)$ 為微分方程式 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 2t^2$ 之解，其中 $y(0) = y'(0) = 0$ 。
- 若 $Y(s) = \frac{a}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} + \frac{d}{(s+2)^2} + \frac{e}{s+2}$ 為 $y(t)$ 之拉氏轉換，其中 a, b, c, d, e 為常數，求 $a+d$ 值？
- (A) -1 (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$
- 18 對於隨機變數 X ，以下期望值與變異數的性質何者錯誤？其中 k 為任意常數：
- (A) $E[X+k] = E[X] + k$ (B) $Var[kX] = kVar[X]$
(C) $Var[X+k] = Var[X]$ (D) $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$
- 19 連續隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為
- $$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{if } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
- 試求 $P(X \leq 2Y)$ ？
- (A) 0.25 (B) 0.5 (C) 0.75 (D) 1
- 20 兩離散隨機變數 X, Y 之結合機率 $P(X=x, Y=y)$ 如下表，則協方差（covariance） $Cov(X, Y) = ?$
- | | | | | |
|---------------|---|-----|-----|-----|
| $P(X=x, Y=y)$ | | X | | |
| | | 0 | 1 | 2 |
| Y | 0 | 0.1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0.1 | 0.2 |
| | 2 | 0 | 0.1 | 0.5 |
- (A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.5