

代號：70860
70960
頁次：4-1

105年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員
考試及105年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等 別：高員三級考試
類 科 別：電力工程、電子工程
科 目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，計算 $\sin \mathbf{A} = ?$ (10分)

二、函數 $\phi(x, y, z) = 18xyz + e^x$ 的梯度 (gradient) 向量為何？此梯度向量的旋度 (curl) 為何？(10分)

三、求解 $3y^4 - 1 + 12xy^3 y' = 0$ ； $y(1) = 2$ ，其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ 。(15分)

四、假設兩個隨機變數 X 和 Y 的聯合密度函數 (joint density function) 為 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，請問：

(一) X 和 Y 是否為獨立的隨機變數？(請說明理由) (5分)

(二) $P(0.25 < X < 0.5 | Y = 0.75) = ?$ (10分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：6708

- (一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 求出路徑 C 之單位切線向量 (unit tangent vector)，其中 $C: x = \cos(t) + t \sin(t)$ ， $y = \sin(t) - t \cos(t)$ 及 $z = t^2$ ：

(A) $(1/\sqrt{5})[\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}]$

(B) $(1/\sqrt{5})[\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}]$

(C) $(1/\sqrt{5})[\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}]$

(D) $(1/\sqrt{1+4t^2})[\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}]$

2 求力向量 $\mathbf{F} = \mathbf{i} - (y)\mathbf{j} + (xyz)\mathbf{k}$ ，使一質點沿曲線 $x = t, y = -t^2, z = t$ 由 $(0,0,0)$ 移至 $(1,-1,1)$ 所做之功：

- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

3 設 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)$ 為三向量函數，則下列何者錯誤？

- (A) $(c\mathbf{v}(t))' = c\mathbf{v}'(t)$ (c 為一常數) (B) $(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t))' = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
(C) $(\mathbf{u}(t) \bullet \mathbf{v}(t))' = \mathbf{u}'(t) \bullet \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}'(t) \bullet \mathbf{u}(t)$ (D) $(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t))' = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}'(t) \times \mathbf{u}(t)$

4 $\mathbf{F} = (2xy)\mathbf{i} + (xyz^2 - \sin(yz))\mathbf{j} + (ze^{x+y})\mathbf{k}$ 之散度 (divergence) $\text{div } \mathbf{F}$ 為何？

- (A) $(2y)\mathbf{i} + (xz^2 - z \cos(yz))\mathbf{j} + (e^{x+y})\mathbf{k}$ (B) $(2y) + (xz^2 - z \cos(yz)) + (e^{x+y})$
(C) $(-2x)\mathbf{i} - (ze^x)\mathbf{j} + (2z - 1)\mathbf{k}$ (D) $(-2x) - (ze^x) + (2z - 1)$

5 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ ，其中 \mathbf{D} 為對角矩陣，求 $\det(\mathbf{A}^{100})$ ：

- (A) 5^{100} (B) 5^{101} (C) $5^{100} + 4^{100}$ (D) 0

6 下列那一矩陣滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ ？

- (A) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$ (B) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$ (C) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ (D) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

7 令 \mathbf{S} 為 $(1, 0, i)$ 與 $(1, 2, 1)$ 在三維複數空間所生成之子空間，則下列何者在 \mathbf{S} 之正交補集 (orthogonal complement) \mathbf{S}^\perp 中？

- (A) $(1, 0, -i)$ (B) $(2, 1+i, -2i)$ (C) $(1+i, 1-i, 3)$ (D) $(2, -1+i, -2i)$

8 一個矩陣 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，下列何者輔因子 (cofactor) 錯誤？

- (A) $C_{11} = 0$ (B) $C_{21} = -48$ (C) $C_{31} = 30$ (D) $C_{41} = 3$

9 令複數 $z = 1 + i$ ，則 z 亦可改寫為何？

- (A) $\sqrt{2}e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數
 (B) $-\sqrt{2}e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數
 (C) $-e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數
 (D) $e^{i(0.25\pi+2n\pi)}$ ， n 為整數

10 已知複變數函數 $f(z) = \frac{1 - \cosh z}{z^3}$ 的奇異點 (singular point) 是為一個極點 (pole)，試決定此極點的階數 (order) M 及對應的留數 (residue) B 分別為何？

- (A) $M = 3, B = \frac{-1}{2}$ (B) $M = 1, B = \frac{-1}{2}$ (C) $M = 3, B = \frac{1}{2}$ (D) $M = 1, B = \frac{1}{2}$

11 微分方程式 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 11x \frac{dy}{dx} + 50y = 0$ 之通解為 $y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln |x|) + c_2 \sin(\beta \ln |x|)]$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數，求 $\alpha + \beta$ ：

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

12 採用級數解法來求微分方程式 $(1+x)y' = 2y$ 的解可得下列的表示式 $y(x) = A(a+bx+cx^2+\dots)$ ，試求 a, b, c 值：

- (A) $a = 2, b = 2, c = 1$ (B) $a = 2, b = 1, c = 2$
 (C) $a = 1, b = 1, c = 2$ (D) $a = 1, b = 2, c = 1$

13 已知微分方程式 $x^2 y'' + axy' + by = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1 \frac{1}{\sqrt{x}} + c_2 x^2$ ，試求 a, b 之值，並判定下列何者正確？
 (題中 a, b, c_1 及 c_2 為常數)

- (A) $a + b = -1.5$ (B) $a + b = 1.5$ (C) $a + b = -2.5$ (D) $a + b = 2.5$

14 求 $u(t)$ 和 $2u(t)$ 的迴旋 (convolution)，其中 $u(t)$ 為單位步階函數：

- (A) 0 (B) $2u(t)$ (C) $2tu(t)$ (D) $(2t - t^2)u(t)$

15 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ ，令 $L\{f(t)\} = \frac{9e^{-2s}}{s^2 + 4s + 13}$ ，則 $f(t)$

為何？下列選項中的 $u(t)$ 為單位步階函數。

(A) $[3e^{-2t} \sin 3t]u(t-2)$

(B) $[9e^{-2t} \cos 3t]u(t-2)$

(C) $[3e^{-2(t-2)} \sin 3(t-2)]u(t-2)$

(D) $[9e^{-2(t-2)} \cos 3(t-2)]u(t-2)$

16 下列選項何者為 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ 於 $z=0$ 之泰勒展開式？

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n, |z| < 1$

(B) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n, |z| < 1$

(C) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n, |z| < 1$

(D) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n, |z| < 1$

17 已知一部汽車引擎之生命遵循平均值為 10 年之指數分佈 (exponential distribution)，求一部用了 10 年之汽車引擎可以再用 5 年之機率為何？

(A) $e^{-1/4}$

(B) $e^{-1/2}$

(C) e^{-2}

(D) e^{-4}

18 離散隨機變數 X 與 Y 之結合機率質量函數 (joint probability mass function) 為

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{cx}{y}, & \text{if } x=1, 2, 3, y=1, 2, 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ 試求條件機率 } P(X=1|Y \leq 2) :$$

(A) 1/6

(B) 1/4

(C) 1/3

(D) 1/2

19 從 1 到 1000 的整數中隨意任選一個數字，則這個數字可以被 3 或是 5 整除的機率為何？

(A) 0.333

(B) 0.467

(C) 0.533

(D) 0.599

20 給定一個連續隨機變數 X ，其累積分佈函數 (cumulative distribution function) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-8x}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，則

機率 $P(X=1)$ 之值為何？

(A) $1 - e^{-8}$

(B) 0

(C) 1

(D) $8e^{-8}$