

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、試利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 解微分方程式 $y'' + 2y' + 4y = 7e^{-3t}$ ， $y(0) = y'(0) = 1$ ，其中

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}。 \quad (15 \text{ 分})$$

二、求下列聯立方程式：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
 之解。(10分)

三、令 Z 為一標準常態分布隨機變數 (standard normal random variable)，其機率密度函數 (probability density function) 為 $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ ， $-\infty < z < \infty$ ，試求隨機變數 $Y = \frac{1}{Z}$ 之機率密度函數。(10分)

四、令 Σ 是以 $(0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,1,1), (0,1,1)$ 為頂點之正立方體的表面，若 \mathbf{n} 為 Σ 之向外單位法向量，且 $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ，求 $\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ 。(15分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：6307

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 若一曲線 C 的位置函數為 $\mathbf{F}(t) = (\cos(t) + t\sin(t))\mathbf{i} + (\sin(t) - t\cos(t))\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$ ，其中 $t > 0$ ，其速率為何？
(A) $t\cos(t)\mathbf{i} - t\sin(t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$ (B) $t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$ (C) $\sqrt{17}t$ (D) $17t^2$
- 令向量函數 $\mathbf{F} = [-y, x]$ ，曲線 C 為從 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的半圓，則線積分 $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ 之值為何？
(A) $3\pi/2$ (B) π (C) $3\pi/4$ (D) $2\pi/3$
- 若 $u = x^2y$ ， $\nabla^2 u$ 等於：
(A) y (B) $2y$ (C) $2xy$ (D) $2x$
- 曲線 C 的參數表示式為 $x = \cos(t)$ ； $y = \sin(t)$ ； $z = t$ ，則曲線 C 從 $P_1 = (1,0,0)$ 到 $P_2 = (-1,0,\pi)$ 弧線長 (arc length) 為何？
(A) $\sqrt{2}\pi$ (B) 2π (C) $\sqrt{1+\pi^2}$ (D) $(1+\pi^2)^{3/2} - 1$
- 當矩陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 A 之特徵值為多少？
(A) 2, 3 (B) -2, 3 (C) -2, -3 (D) 2, -3
- 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^3 - 2A^2 - A$ 為何？
(A) 0 (B) $2A$ (C) $3A$ (D) $-3A$
- 當有一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ 時，試求 A 矩陣的行列式值為何？
(A) 67 (B) 84 (C) 86 (D) 90
- 複變函數 $f(z) = \frac{-\cos(z-i)}{(z-2i)^3}$ 在 $z=2i$ 的留數 (residue) 為何？其中 $i = \sqrt{-1}$ 。
(A) $\frac{1}{2} \cosh(1)$ (B) $\frac{1}{2} \sinh(1)$ (C) $\cosh(1)$ (D) $\sinh(1)$

(請接背面)

考試別：國家安全情報人員
等別：三等考試
類科組：電子組
科目：工程數學

- 9 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z-2|=2$ ，試求積分 $\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$ 為何？
(A) πi (B) 0 (C) $-\pi i$ (D) $2\pi i$
- 10 計算 $(1+i)^3$ 的值為何？
(A) $i^3 - 3i^2 + 3i - 1$ (B) $i^3 + 1$ (C) $2i - 2$ (D) $2i + 4$
- 11 下列何者為一維擴散方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 之解的函數？其中 c 為一適當的常數。
(A) $u = \sin 2t \cos 4x$ (B) $u = e^t \cos 25x$ (C) $u = \cos 4t \sin 2x$ (D) $u = e^{-t} \sin x$
- 12 請問下列何者為 $(1+x)y'' - 4xy' + y = 0$ 之奇點 (singular point)？
(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) -2
- 13 已知 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\pi}{2} \\ -1 & -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，求 $f(t)$ 的傅立葉積分表示法。
(A) $f(t) = \frac{2}{\pi\omega} \int_0^\infty \left(1 - \cos \frac{\pi\omega}{2}\right) \sin \omega t d\omega$ (B) $f(t) = \frac{2}{\pi\omega} \int_0^\infty \left(1 + \cos \frac{\pi\omega}{2}\right) \sin \omega t d\omega$
(C) $f(t) = \frac{2}{\pi\omega} \int_0^\infty \left(1 + \sin \frac{\pi\omega}{2}\right) \sin \omega t d\omega$ (D) $f(t) = \frac{2}{\pi\omega} \int_0^\infty \left(1 - \sin \frac{\pi\omega}{2}\right) \sin \omega t d\omega$
- 14 當 $m \neq n$ 時，下列有關三角正弦與餘弦函數的正交特質 (orthogonality)，何者錯誤？
(A) $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ (B) $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0$ (C) $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ (D) $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$
- 15 一微分方程式 $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ 被稱為勒見德方程式 (Legendre's equation)，其中 n 為實數，則下列何者不為該方程式的解 $P_n(x)$ ？
(A) $P_0(x) = 1$ (B) $P_1(x) = x$ (C) $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ (D) $P_3(x) = \frac{1}{3}(5x^3 - x)$
- 16 求 $(1-t)u(1-t)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform)，其中 $u(t)$ 為單位步階函數。
(A) $\frac{e^{-s}}{s^2}$ (B) $\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s}$ (C) $\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}$ (D) $\frac{1}{s} - \frac{1-e^{-s}}{s^2}$
- 17 連續隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{if } x > 0, |y| < x \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 。已知 $x > 0$ ，試求條件期望值 $E[Y^2 | X=x]$ 。
(A) $\frac{x}{2}$ (B) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ (C) $\frac{x^2}{4}$ (D) $\frac{x^2}{3}$
- 18 有 1 打雞蛋 (其中有 4 顆雞蛋並未煮熟)，從中隨機取出 2 顆雞蛋，試問這 2 顆雞蛋為全熟之機率為何？
(A) $\frac{4}{11}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{14}{33}$ (D) $\frac{7}{18}$
- 19 假設從一般的 52 張撲克牌中連續抽取 3 張牌，且所抽取的每張牌都不放回。假設 D 表示第 1 張牌是紅色 A 的事件， E 表示第 2 張牌是 10 或是 J 的事件， F 表示第 3 張牌是大於 3 但是小於 7 的事件。請問事件 $D \cap E \cap F$ 會發生的機率為何？
(A) $8/5525$ (B) $12/5525$ (C) $16/5525$ (D) $24/5525$
- 20 令 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 & 7 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，下列何者為矩陣 A 的零空間 (null space) 基底向量 (basis)？
(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$