

代號：26620  
26720  
29620  
頁次：4-1

# 104年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用級數方法求解  $y' = 2xy$ ，且以級數法表示其解，至少求至  $x^6$  項。(使用其他非級數法解不計分) (15 分)

二、設  $\lambda_1, \lambda_2$  及  $\lambda_3$  為一  $3 \times 3$  的實數矩陣  $\mathbf{M}$  的整數特徵值 (eigenvalues)，且其中  $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$ 。 $\mathbf{M}$  的行列式值 (determinant) 為 36，且其跡 (trace) 為 10。令  $\mathbf{I}$  為  $3 \times 3$  單位矩陣 (identity matrix)，請找出  $(\mathbf{M} - \mathbf{I})^2$  的全部特徵值。(15 分)

三、設  $X$  與  $Y$  是兩互相獨立的隨機變數 (independent random variable)，且其機率密度函數 (probability density function) 分別表示如下：

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/3, & 2 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

設  $W = X + Y$ 。

求(一)  $W$  的機率密度函數 (probability density function)  $f_W(w)$ 。(5 分)

(二)畫出  $f_W(w)$  之函數圖形。(5 分)

四、令區域  $D$  定義為  $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ ， $0 \leq x \leq 2$ ，求  $\iint_D (x^2 + y^2)^{4/3} dA$ 。(10 分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：2266

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 向量場  $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+xe^y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$  在點  $P = (-1, 0, 1)$  的旋度 (curl) 為何？  
 (A)  $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$  (B)  $-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$  (C)  $-\mathbf{e}\mathbf{j}+2\mathbf{k}$  (D)  $3\mathbf{k}$
- 2 試用 divergence theorem，求面積分  $I = \iiint_S (x^3 dydz + x^2 y dx dz + x^2 z dx dy)$ ，其中  $S$  為一封閉面，包括一圓柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $0 \leq z \leq b$ ) 及在  $z = 0$  及  $z = b$  之二圓面積 ( $x^2 + y^2 \leq a^2$ )。  
 (A)  $\frac{3\pi}{2} a^4 b$  (B)  $\frac{5\pi}{2} a^4 b$  (C)  $\frac{3\pi}{4} a^4 b$  (D)  $\frac{5\pi}{4} a^4 b$
- 3 定義函數為  $\varphi(x, y, z) = xy - yz + xyz$ ，請計算點  $P = (0, -1, 1)$  在  $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  方向的改變率 (rate of change)？  
 (A) 2 (B) -2 (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $-\sqrt{5}$
- 4 若向量  $\mathbf{F}=\mathbf{i}-3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{G}=2\mathbf{j}$ ,  $A = \|\mathbf{F} + \mathbf{G}\|$  為  $\mathbf{F} + \mathbf{G}$  的 2-norm，則  $A$  值為：  
 (A)  $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$  (B)  $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$  (C) 14 (D)  $\sqrt{14}$
- 5 一矩陣  $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，下列何者錯誤？  
 (A)  $M$  可對角化  
 (B) 存在矩陣  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，使得  $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$   
 (C)  $M$  之特徵值 (eigenvalue) 為 2, -2, 3  
 (D) 存在可逆矩陣  $Q$ ，使得  $Q^{-1}MQ = D$ ，則  $M$  與  $D$  為相似矩陣 (similar matrices)
- 6 已知  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 20$ ，則  $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ -2d & -2e & -2f \\ -2g & -2h & -2i \end{vmatrix}$  之值為何？  
 (A) 0 (B) 20 (C) 40 (D) 80
- 7 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$ ，下列何者不是  $A$  的特徵值 (eigenvalue)？  
 (A) 2 (B) 4 (C)  $2 + \sqrt{3}$  (D)  $2 - \sqrt{3}$

8 一矩陣  $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，下列何者錯誤？

(A)  $M^3 = \begin{bmatrix} -5 & 16 & 9 \\ -2 & -5 & -23 \\ -23 & 9 & 11 \end{bmatrix}$

(B)  $M^3 - 7M^2 + 19M = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

(C)  $M$  之特徵多項式 (characteristic polynomial) 為  $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 19\lambda - 19$

(D)  $M^4 = 30M^2 - 114M + 139I$

9 試計算複數多項式 (complex polynomial)  $p(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$  在  $|z|=1$  的圓內有多少個零點 (zeros) ? (包括重複數(multiplicities))

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

10 設  $C$  為  $|z|=2$  之逆時針方向之封閉曲線，則  $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$  之值為何？

(A) 0

(B)  $i2\pi$

(C)  $i6\pi$

(D)  $i10\pi$

11 化簡  $\overline{(6-2i)(1+i)}$  可得：

(A)  $4i+8$

(B)  $4i-8$

(C)  $-4i+8$

(D)  $-4i-8$

12 下列何者為此階梯函數  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t \end{cases}$  之拉普拉斯轉換？

(A)  $\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-3s}$

(B)  $\frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-3s}$

(C)  $\frac{1}{s}e^s + \frac{2}{s}e^{-3s}$

(D)  $\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{2}{s}e^{-3s}$

13 下列那一個常係數齊次偏微分方程式為橢圓型 (elliptic) ?

(A)  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 100 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

(B)  $\frac{\partial u}{\partial y} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

(C)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(D)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

14  $xy' + 2y = x^3 y^2$ ,  $y = ?$

(A)  $\frac{1}{C-x}$

(B)  $\frac{1}{Cx^2 - x^3}$

(C)  $\frac{1}{Cx - x^2}$

(D)  $\frac{1}{Cx^3 - x^4}$

