代號：70440
　　　70540
頁次：3－1

109年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及109年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考　試　別：鐵路人員考試
等　　　別：高員三級考試
類　科　別：電力工程、電子工程
科　　　目：工程數學
考試時間：２小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿＿

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、利用 Laplace Transform 解下列微分方程式，其中方程式的等號右邊為一具有時間延遲的一個單位脈衝（unit impulse）輸入，求 $y(t)$。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\delta(t-1);\quad y(0)=0,\quad \frac{dy}{dt}=0$$（10分）

二、試求 $\oint_{c:|Z|=2}\frac{Z}{1+Z^2}$，其中 c 代表圍線積分的路徑為逆時鐘方向。（10分）

三、$f(x)=\frac{1}{4}x^2$，若 $-\pi<x<\pi$ 且 $f(x+2\pi)=f(x)$ 求此函數之傅立葉級數（Fourier Series）。（15分）

四、若 $f(x)=x^7-2x^2+x-2\mathrm{I},\quad \mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{bmatrix}$，I 為單位矩陣，求 $f(\mathrm{A})=$？（15分）

乙、測驗題部分：（50分）　　　　代號：4704

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　設向量 $\mathbf{u}=(3,\ -2,\ -5)$，$\mathbf{v}=(1,\ 4,\ -4)$，$\mathbf{w}=(0,\ 3,\ 2)$，則 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ 之值為何？其中運算元×表示為外積（cross product），$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 則表示為 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的內積（inner product）。

(A) 49　(B) 56　(C) 84　(D) 92

2 已知 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 為向量空間（vector space）$\mathbf{V}$ 中的兩個非零向量（nonzero vector），下列敘述何者不恆真？

(A)若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 為正交（orthogonal），則 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

(B) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

(C) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

(D)若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的夾角為 θ，則 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$

3 令 A, B 均為 n 階方陣，則下列何者恆成立？

(A) AB=BA (B) $(AB)^T=A^TB^T$ (C) det(AB)=det(BA) (D) det(A+B)=det(A)+det(B)

4 下列方陣 A，何者存在矩陣 P 滿足 $P^TP=I$，且 P^TAP 為對角矩陣？

(A) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (D) $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5 下列何者非與矩陣 $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 互為相似矩陣（similar matrices）？

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

6 假設函數 $F(s)=\ln\dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}$ 的逆拉氏轉換（inverse Laplace transform）為 $f(t)=\dfrac{1}{t}(a\cos t + b\sin t)$，其中 a, b 是常數，求 $a+b=$？

(A) −2 (B) −1 (C) 0 (D) 2

7 計算複數函數 $f(z)=(1+i)^{1-i}$ 為：

(A) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$

(B) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$

(C) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$

(D) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$

8 給定一複數函數為 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$，假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z-1|=1$ 之路徑，則線積分 $\int_C f(z)dz=$？

(A) 0 (B) πi (C) $2\pi i$ (D) $3\pi i$

9 求 $f(z)=\dfrac{2iz-\cos(z)}{z^3+z}$ 在 $z=-i$ 的殘餘值（residue）為：

(A) 0 (B) $1+\dfrac{1}{2}\cos(i)$ (C) $-1+\dfrac{1}{2}\cos(i)$ (D) $-1-\dfrac{1}{2}\cos(i)$

10 求解積分方程式 $y(t)=t+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$ 為：

(A) $y(t)=\dfrac{1}{3}t^3+2t$ (B) $y(t)=\dfrac{1}{6}t^3$ (C) $y(t)=\dfrac{1}{6}t^3+t$ (D) $y(t)=\dfrac{1}{3}t^3+t$

11 下列何者不是 $y(x)$ 的線性（linear）微分方程式？（其中 $y'=\frac{dy}{dx}$）

(A) $x^3y'+3x^2y=\frac{1}{x}$　(B) $x^2y'+2xy=\sinh 5x$　(C) $y'=1+y^2$　(D) $xy'=2y+x^3e^x$

12 下列那一個函數組合可構成微分方程式 $y^{(4)}-y=0$ 的解之基底（basis of solutions）？（其中 $y^{(4)}\equiv\frac{d^4y}{dx^4}$）

(A) $\cos x,\quad \sin x,\quad x,\quad x^{-1}$　(B) $e^x,\quad e^{-x},\quad x,\quad x^{-1}$

(C) $e^x,\quad e^{-x},\quad \cosh x,\quad \sinh x$　(D) $\cos x,\quad \sin x,\quad \cosh x,\quad \sinh x$

13 試問微分方程式 $3y'=5x^3-\frac{3y}{x},\quad x>0$ 的解為何？

(A) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^4+\frac{c}{3x}$　(B) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^4-\frac{c}{3x}$　(C) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^3+\frac{c}{3x}$　(D) $y=\left(\frac{1}{3}\right)x^2-\frac{c}{3x}$

14 假設微分方程式 $y''+xy'-2y=e^{5x}$；其中 $y(0)=2$ 且 $y'(0)=1$，若 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 為此微分方程式之級數解，求 a_4 的值為何？

(A) $\frac{11}{12}$　(B) $\frac{13}{12}$　(C) $\frac{25}{24}$　(D) $\frac{29}{24}$

15 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為 $L\{f(t)\}$，令 $L\{f(t)\}=\frac{-1}{(s-1)(s-2)}$，則 $f(t)$ 可能為何？

(A) e^t+e^{2t}　(B) $-e^t-e^{2t}$　(C) $-e^t+e^{2t}$　(D) e^t-e^{2t}

16 求 $f(t)=|\sin(t)|$ 之拉氏轉換式為：

(A) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$　(B) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1+e^{-\pi s})}$　(C) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2-1)(1-e^{-\pi s})}$　(D) $\frac{1-e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$

17 已知函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform）存在，且其傅立葉轉換標記為 $F(\omega)=\Im\{f(t)\}$，下列何者恆真？

(A)若 $f(t)$ 在 $t=4$ 為連續，則 $f(4)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-4)dt$，其中 $\delta(t)$ 為單位脈衝訊號（unit impulse signal）

(B) $f(t-4)$ 的傅立葉轉換為 $e^{j4\omega}F(\omega)$

(C) $e^{j4t}f(t)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega+4)$

(D) $e^{3t}f(t)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega-3)$

18 從 72 的所有正因數中，隨機選取一數，此數值大於 15 的機率為何？

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{5}{12}$　(D) $\frac{7}{12}$

19 假設兩個隨機變數 (X,Y)，其聯合機率分布（joint probability distribution）為 $f(x,y)=\frac{x+y}{30}$，其中 $x=0,1,2,3;\quad y=0,1,2$，試算出機率 $P(X>Y)$ 為何？

(A) $\frac{3}{5}$　(B) $\frac{17}{30}$　(C) $\frac{5}{6}$　(D) $\frac{7}{10}$

20 隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數為 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x\le y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，則 X 與 Y 之期望值分別為：

(A) 8/15，4/5　(B) 8/15，4/15　(C) 4/5，8/15　(D) 4/15，8/15