112年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員、國家安全局國家安全情報人員考試及112年特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

考　試　別：鐵路人員考試、國家安全情報人員考試
等　　　別：高員三級考試、三等考試
類科組別：電力工程、電子組（選試英文）
科　　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、求微分方程式（Differential Equations）：$\frac{d^2}{dx^2}y(x)-9y(x)=9xe^{-3x}$之通解（general solution）。（15 分）

二、矩陣（matrix）$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$：（每小題 5 分，共 15 分）

㈠求矩陣（matrix）A之特徵值（eigenvalues）與特徵向量（eigenvectors）。

㈡求矩陣函數e^{At}。

㈢求系統方程式（system equations）$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt}&=-x_1(t)+2x_2(t)\\ \frac{dx_2(t)}{dt}&=-3x_2(t)\end{aligned}$之通解（general solution）。

三、擲四枚硬幣（Flip four coins），試驗結果有 16 種結果（outcomes）：$o_1,o_2,...,o_{16}$，其中$o_1=HHHH$，$o_2=HTHH$，…，$o_{16}=TTTT$；若定義隨機變數（random variable）X為：$X(o_j)=$出現背面（T）的硬幣數目，例如：$X(o_1)=0$，$X(o_2)=1$；P為隨機變數X之機率分布（probability distribution），例如：$P(0)=1/16$，$P(1)=4/16$。（每小題 5 分，共 10 分）

㈠求此隨機變數X之均值（mean）或期望值（expected value）：μ_X。

㈡求此隨機變數X之標準差（standard deviation）或變異數的開根號（square root of the variance）：σ_X。

四、複數函數 $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-1)(z+1)}$：（每小題 5 分，共 10 分）

㈠求 $f(z)$ 在 $z=1$ 與 $z=-1$ 的留數（residue）。

㈡閉合曲線（closed curve）C 為圓 $|z|=2$；利用柯西（Cauchy）留數定理（Residue Theorem）求複數線積分 $\oint_C \dfrac{ze^z}{(z-1)(z+1)}dz$。

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：7704 6357

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 某能量場可用函數 $\varphi(x,y,z)=0.5(x^2+2xy+2y^2+z^2)$ 表示。該能量場在點 $P(-1,0,1)$ 的最大變化率（rate of change）為何？

(A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

2 令矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$，則下列選項中何者為矩陣 A 的秩數（rank）？

(A)4 (B)3 (C)2 (D)1

3 考慮聯立方程組 $Ax=0$，其中 $A\in R^{8\times 10}$。若此方程組的通解含有 6 個任意常數，則 A 的值域空間（range space）維度（dimension）為何？

(A)8 (B)6 (C)4 (D)3

4 給定兩向量 $u=[1\ \ 1\ \ 2]^T$ 及 $v=[2\ \ -1\ \ 1]^T$，下列選項何者錯誤？

(A)此兩向量的範數（norm）乘積為 6

(B)此兩向量的內積（inner product）為 3

(C)此兩向量的外積（cross product）為 $[-3\ \ -3\ \ 3]^T$

(D)此兩向量的夾角為 $\dfrac{\pi}{3}$

5 T 為 R^2 到 R^3 的線性轉換，且滿足 $T(u+4v)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$T(2u+3v)=\begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}$。$T(u)$＝？

(A) $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\-7\\12\end{bmatrix}$ (B) $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\7\\12\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}3\\7\\12\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-3\\-7\\12\end{bmatrix}$

6 若 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 存在可逆矩陣 P 可將其對角化為 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$。則 P 的第一行行向量為何？

(A) $\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$

7　令矩陣 $A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，則 A^2 的特徵值（eigenvalues）不是下列那一個選項？

(A) 9　(B) 1　(C) 16　(D) 4

8　下列矩陣何者是不可被「對角線化（diagonalizable）」？

(A) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

9　考慮微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=a(x)b(y), a(x)b(y)\neq 0$。若乘上積分因子 $\mu(x,y)$ 後可將此方程式轉換成正合（exact）微分方程式，則 μ 為下列何者？

(A) $\mu=a(x)$　(B) $\mu=\dfrac{1}{a(x)}$　(C) $\mu=-b(y)$　(D) $\mu=\dfrac{1}{b(y)}$

10　考慮微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\cos(x)\dfrac{dy}{dx}+\sin(x)y=1-x^3, y(0)=1, \dfrac{dy}{dx}(0)=0$。若此方程式的級數解可表示為 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，則 c_3 為何？

(A) $c_3=-\dfrac{1}{3}$　(B) $c_3=-\dfrac{1}{6}$　(C) $c_3=\dfrac{1}{6}$　(D) $c_3=\dfrac{1}{3}$

11　函數 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換（Laplace transform）為 $\mathcal{L}\{f(t)\}$，令 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$，則下列何者正確？

(A) $f(t)=te^{-t}-e^{-t}+1$　(B) $f(t)=-te^{-t}+e^{-t}+1$

(C) $f(t)=-te^{-t}-e^{-t}-1$　(D) $f(t)=-te^{-t}-e^{-t}+1$

12　函數 $f(t)=2\cos(3t), 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{3}$，若在 $t=0$ 處，$f(t)$ 的傅立葉餘弦級數（Fourier cosine series）收斂到 A，傅立葉正弦級數（Fourier sine series）收斂到 B；在 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 處，$f(t)$ 的傅立葉餘弦級數（Fourier cosine series）收斂到 C，傅立葉正弦級數（Fourier sine series）收斂到 D。則 A,B,C,D 各值為何？

(A) $A=0, B=0, C=0, D=0$　(B) $A=2, B=0, C=-2, D=0$

(C) $A=0, B=2, C=-2, D=0$　(D) $A=2, B=0, C=2, D=0$

13　已知函數 $f(t)=\dfrac{1}{a}e^{-a|t|}, a>0$，則下列何者為函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform）($i=\sqrt{-1}$)？

(A) $\dfrac{-2i\omega}{a(a^2+\omega^2)}$　(B) $\dfrac{2i\omega}{a(a^2+\omega^2)}$　(C) $\dfrac{-2}{a^2+\omega^2}$　(D) $\dfrac{2}{a^2+\omega^2}$

14　考慮複變函數 $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$，其中 $z=x+iy$。則 $\dfrac{df(z)}{dz}$ 為何？

(A) $\dfrac{df(z)}{dz}=(-6xy)+i(3x^2-3y^2)$　(B) $\dfrac{df(z)}{dz}=(3x^2-3y^2)+i(6xy)$

(C) $\dfrac{df(z)}{dz}=(3x^2-3y^2)+i(3x^2-3y^2)$　(D) $f(z)$ 不可以微分

15　考慮複變函數（complex function）$f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z+5}$，若 C 為逆時鐘繞圓周 $|z-1-i|=2$ 的路徑，且積分 $\oint_C f(z)dz=a+bi$，則下列選項何者正確？

(A) $a=\dfrac{\pi}{2}$　(B) $a=\pi$　(C) $b=-\dfrac{\pi}{2}$　(D) $b=-\pi$

16 給定複變數函數 $f(z)=\dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$，針對區域 $1<|z|<3$ 對函數 $f(z)$ 展開可得 $f(z)=\cdots+az^{-1}+b+cz+dz^{2}+\cdots$，則下列選項何者正確？

(A) $a=-\dfrac{1}{3}$　(B) $b=-\dfrac{1}{3}$　(C) $c=-\dfrac{1}{3}$　(D) $d=-\dfrac{1}{3}$

17 某元件使用壽命 X（單位：小時），其機率密度函數（probability density function）為 $f(x)=0.005e^{kx}, x\geq 0$。則 k 值及元件平均使用壽命為何？

(A) $k=0.005$，平均使用壽命 200 小時　(B) $k=0.005$，平均使用壽命∞小時
(C) $k=-0.005$，平均使用壽命 200 小時　(D) $k=-0.005$，平均使用壽命∞小時

18 某雜訊的機率密度函數（probability density function）為 $[-1,3]$ 的均勻分佈，其變異數（variance）為 A。經過增益為 5 的放大器放大以後，其變異數為 B。則 A,B 各值為何？

(A) $A=\dfrac{4}{3}, B=\dfrac{20}{3}$　(B) $A=\dfrac{4}{3}, B=\dfrac{100}{3}$　(C) $A=\dfrac{16}{3}, B=\dfrac{80}{3}$　(D) $A=\dfrac{16}{3}, B=\dfrac{400}{3}$

19 令隨機變數 X,Y 的聯合機率密度函數（Joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} kx(1+2y), & 0\leq x\leq 2, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 k 為實數，則下列何者正確？

(A) $k=\dfrac{1}{2}$

(B)邊際機率密度（Marginal probability density function）為 $g(x)=\dfrac{x}{4}, 0\leq x\leq 2$

(C)邊際機率密度（Marginal probability density function）為 $h(y)=\dfrac{1+2y}{4}, 0<y<1$

(D)條件機率密度（conditional probability density function）為 $f(y|x)=\dfrac{1+2y}{2}, 0<y<1$

20 給定兩向量 $u=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$ 及 $v=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\end{bmatrix}^T$，分解 u 為 u_1+u_2，其中 u_1 為 u 在 v 的垂直投影（orthogonal projection），則下列選項何者錯誤？

(A)向量 $u_1=\begin{bmatrix}\dfrac{20}{7} & -\dfrac{5}{7} & \dfrac{10}{7}\end{bmatrix}^T$

(B)向量 u_2 的範數（norm）$\|u_2\|=\dfrac{\sqrt{161}}{7}$

(C)兩向量 u_2, v 的外積（cross product）為零向量

(D)兩向量 u_1, u_2 的內積（inner product）為零