

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

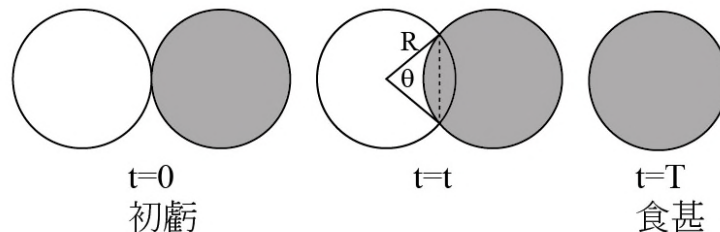
(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、科學問題應用，模擬日全蝕現象（如 2020/6/21 之日全蝕），計算日全蝕過程中於日全蝕處大氣短收直接來自太陽的能量。日全蝕過程如圖，白色圓圈為太陽、灰色圓圈為月亮，兩星球視覺半徑皆為 R 。假設月亮靜止不動，太陽等速直線運動（ $v=2R/T$ ）， t 為時間，初虧時 $t=0$ ，食甚時 $t=T$ （兩星球完全重疊），單位時間、單位面積之太陽能量強度為 S ，且假設 S 為固定值。

(一)求在 $t=0\sim T$ 任意時間兩球重疊處的面積 A ， θ 為重疊處之夾角， A 為 θ 之函數。（10 分）

(二)求初虧到食甚過程（ $t=0\sim T$ ）中於日全蝕地點大氣所短收直接來自太陽的能量。（20 分）

（提示：能量變化 $dw=dA\cdot S\cdot dt$ ）



二、傅立葉級數（Fourier series）與應用：

(一)若函數 $f(t)$ 可以被展開為傅立葉級數，則 $f(t)$ 需滿足什麼條件？（10 分）

(二)若有一組觀測資料 $f(t)$ ，總共有 $2N$ 個觀測數據，時間總長度為 T ， n 為特徵值，請寫出 $f(t)$ 之傅立葉級數。（10 分）

(三)利用(二)之傅立葉級數，針對相同週期之特徵函數（特徵值為 n ），其週期、振幅及相位各為何？（15 分）

三、球面上兩點之間的距離：

若地球半徑 $R=6400$ 公里，在地球面上有 A 、 B 兩點，其經緯度各為 A ($30^{\circ}\text{N}, 120^{\circ}\text{E}$)， B ($60^{\circ}\text{N}, 150^{\circ}\text{E}$)，求在地球面上 A 、 B 兩點之間的距離（請寫出近似之數值）。（15 分）

提示 1：球面上兩邊夾一角求第三邊公式：

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

提示 2：三角函數可利用泰勒級數展開得到近似值

四、矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(一)求 \mathbf{A} 之特徵值 (eigenvalues) 及特徵向量 (eigenvectors)。(10 分)

(二)將 \mathbf{A} 對角線化 (diagonalization)。(10 分)