111 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　　　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮一個雙變數函數如下所示：$f(x,y)=\left(x^2+2y\right)\cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)}$。令$P_0$代表 $x-y$ 平面上的點$(1,-1)$（即 $P_0=(1,-1)$）。

㈠請計算$f(x,y)$在P_0的梯度（gradient）為何？（5 分）

㈡請計算 $f(x,y)$ 在 P_0 的上面沿著$(1,0)$的方向之方向導數（directional derivative）為何？（5 分）

二、有一個微分方程式如下所示（僅考慮$x>0$）：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}\cdot y=x\ ,\ \text{for}\ \ x>0$$

此外，初始條件如下所示：$y(1)=3$。

㈠此為一階線性微分方程（first-order linear differential equation），可以使用積分因子（integrating factor）求解。試求微分方程之積分因子。（5 分）

㈡請求解 $y(x)$。（5 分）

三、有一個3×3的矩陣如下所示：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

已知此矩陣的特徵值（eigen-value）為 2、2（重根）、1。

㈠請寫出A矩陣的所有特徵向量（eigen-vector）的一般形式。（5 分）

㈡令$B=A^8$。請寫出B矩陣的所有特徵向量的一般形式。（5 分）

四、有一個半徑為 1 的圓形標靶，對著它亂射飛鏢，完全不瞄準，所以彈著點（亦即飛鏢在標靶上的落點）會是在某一個區域的機率大小，與標靶上的位置無關，只與該區域的面積大小成正比。若只考慮有射中標靶的飛鏢，直接忽略沒有射中標靶的飛鏢。令 X 代表彈著點到靶心（亦即標靶的正中心）的距離，是一個隨機變數（random variable），並定義另外一個隨機變數：$Y \triangleq X^2$，試問：

㈠令 $f_X(x)$ 代表 X 的機率密度函數（probability density function），則 $f_X(x)=$？（5 分）

㈡令 $f_Y(x)$ 代表 Y 的機率密度函數，則 $f_Y(x)=$？（5 分）

五、有一個複變函數 $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$，欲對其作曲線積分（contour integration），請回答下列問題：

㈠考慮如下所示的曲線：C_1：$|z|=3$（即以複數平面原點為中心、半徑為 3 的圓），從 $z=3+0\cdot i$（$i=\sqrt{-1}$）逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問 $\oint_{C_1} f(z)dz=$？（5 分）

㈡考慮如下所示的曲線：C_2：$|z-i|=2$（即以 $0+1\cdot i$ 為中心、半徑為 2 的圓），從 $z=0+(-1)\cdot i$（$i=\sqrt{-1}$）逆時針旋轉繞一圈回到原出發點。試問 $\oint_{C_2} f(z)dz=$？（5 分）

乙、測驗題部分：（50分） 代號：7346

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 我們準備對 $(1,-1,3)$ 以及 $(2,0,-4)$ 這兩個向量做外積（cross product）。如果將答案寫成 $(1,-1,3)\times(2,0,-4)=(a,b,c)$，那麼 $a\times b\times c=$？

(A) 30 (B) 80 (C) 100 (D) 150

2 考慮一線性方程組 $Ax=b$，A 為 $m\times n$ 矩陣，$m>n$。下列敘述何者錯誤？

(A)該方程組可能無解

(B)該方程組可能只有一解

(C)該方程組不可能有無窮多解

(D)矩陣 A 的列階梯形矩陣（row echelon form）一定有「零」列（row of all zeros）

3 如果用 ϕ 來代表 $(1,3,2)$ 與 $(0,-1,4)$ 這兩個向量之夾角，那麼 $\sin^2\phi=$？請選出最接近的數值：

(A) 0.9 (B) 0.7 (C) 0.5 (D) 0.3

4 假設我們已知 $(1,2,3)$、$(1,0,-1)$ 以及 $(3,1,\alpha)$ 這三個向量無法構成 $\Re^3\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\Re\}$ 的基底（basis）。那麼，$\alpha=$？

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$

5 考慮如下所示之矩陣：$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$。下列敘述何者正確？
(A) A 為可逆（invertible）的矩陣
(B) A 為既約列梯形（reduced row echelon form）的矩陣
(C) A 為單位矩陣（identity matrix）
(D) A 為對稱（symmetric）的矩陣

6 如下所示之選項中，何者為矩陣$\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$的特徵向量（characteristic vector，亦稱 eigenvector）？（選項中的符號$[\cdots]^T$代表矩陣轉置（transpose）的動作。提示：建議你直接套用特徵向量的定義下去做檢測）
(A) $[0\,1\,1]^T$　(B) $[1\,0\,1]^T$　(C) $[0\,0\,1]^T$　(D) $[-1\,0\,1]^T$

7 考慮一馬可夫過程（Markov process）：$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}x(k)$，其狀態向量 x 之初值 $x(0)=[100\quad 0]^T$。請問$\lim\limits_{x\to\infty} x(k)$為何？
(A) $[80\quad 20]^T$　(B) $[30\quad 70]^T$　(C) $[60\quad 40]^T$　(D) $[50\quad 50]^T$

8 在下列四個選項所顯示的複變函數（complex function），其中有三個是可解析的（analytic，亦稱 differentiable（可微分的）），有一個是不可解析的（not analytic）。請指出那一個是不可解析的？
(A) e^z　(B) z^3　(C) z　(D) $\bar{z}$ （z 的共軛複數）

9 考慮如下所示之複變函數：$f(z)=\frac{6+i}{z^3}+\frac{-7}{z^2}+\frac{5-2i}{z}+1-2z+(5-i)\cdot z^2+z^3$ （$i=\sqrt{-1}$）。如果我們將該函數在$z=0$（亦即複數平面上的原點）的留數（residue）寫成$a+b\cdot i$的形式，那麼$a+b=$？
(A) -2　(B) 0　(C) 3　(D) 2π

10 在本題中我們考慮複變函數的線積分（line integral）。首先我們知道複數平面上的點可以寫成$z=x+i\cdot y$ （$i=\sqrt{-1}$）的形式，接著我們用Γ代表$y=x^2$這條曲線，而且其起點為$(x,y)=(0,0)$、終點為$(x,y)=(1,1)$。請計算$\int_\Gamma z^2dz$並且將結果寫成$a+b\cdot i$的形式，此時$a\cdot b$的數值與下列選項何者最為接近？
(A) -5　(B) -1　(C) 1　(D) 5

11 令$g(z)=\int_C \frac{s^2-s+2}{(s-z)^2}ds$，其中路徑積分之路徑 C 為以$\pm2,\pm2i$為頂點之正方形的邊界，行經方向為正。請問$g(1)$之值為何？
(A) $2\pi i$　(B) 1　(C) 0　(D) $4\pi i$

12 有一個雙變數函數$f(x,y)=x^2\cdot\sin(x\cdot y)$。請問$f(x,y)$在$(1,\pi)$的梯度（gradient）為何？
(A) $(1,\pi)$　(B) $(\pi,1)$　(C) $(-\pi,-1)$　(D) $(1,-\pi)$

13 考慮微分方程式：$\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=\sin\omega t, t\ge 0$，其中$\ddot{y}$與$\dot{y}$分別代表 y 對變數 t 做一次與二次微分。請問下列敘述何者正確？
(A)對於某些$(\dot{y}(0),y(0))$初值，方程式的解會收斂到零
(B)對於任何非零之$(\dot{y}(0),y(0))$初值，方程式的解是一個頻率為ω之週期函數
(C)對於任何非零之$(\dot{y}(0),y(0))$初值，方程式的解之震幅不會隨輸入函數之頻率ω產生變化
(D)對於任何非零之$(\dot{y}(0),y(0))$初值，方程式的解會隨時間之增大而收斂到一個週期函數

14 考慮一個初始值問題（initial-value problem）一微分方程： $y''(x)+x\cdot y'(x)+e^{x}\cdot y(x)=x^{2}+1$，初始條件： $y(0)=2$ 、 $y'(0)=-1$。 如果我們將本問題的解答 y(x) 寫成冪級數（power series）的形式： $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\cdot x^{n}$ ，那麼， $a_{2}=$？（提示：可以嘗試用泰勒級數（Taylor series）的形式去做思考，直接將 a_2 與 $y''(0)$ 做連結）

(A) -1　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) 0　(D) $\frac{1}{3}$

15 下列關於拉普拉斯轉換（Laplace transformation） $L(f):=\int_{0}^{\infty}f(t)_{e}^{-st}\,dt$ 之敘述，何者錯誤？

(A) $L(f+g)=L(f)+L(g)$
(B) $L^{-1}(f+g)=L^{-1}(f)+L^{-1}(g)$ ，其中 L^{-1} 為 L 之逆轉換
(C) $L(fg)=L(f)L(g)$
(D) $L(f')=s\cdot L(f)$ ，其中 f' 為 f 之導函數，且 $f(0)=0$

16 考慮以下函數： $f(t)=1$，當 $0\le t\le 2$ ； $f(t)=0$ ，當 $t\le 0$ 或 $t\ge 2$。下列敘述何者正確？

(A)函數 $f(t)$ 之傅立葉轉換（Fourier transform）為 $F(\omega)=2e^{-j\omega}\sin(\omega)/\omega$
(B)函數 $g(t):=f(t+1)$ 之傅立葉轉換（Fourier transform）為 $G(\omega)=\cos(\omega)/\omega$
(C)函數 $h(t):=\cos(\omega_0 t)f(t)$ 之傅立葉轉換（Fourier transform）為 $H(\omega)=2\sin(\omega-\omega_0)/(\omega-\omega_0)$
(D)函數 $m(t):=f(-t)$ 之傅立葉轉換（Fourier transform）為 $M(\omega)=-\sin(\omega)/\omega$

17 考慮一隨機變數 x，其機率密度分布函數具有下列形式： $f(x)=1-|x|,|x|\le 1$ ，且 $f(x)=0,|x|>1$。請問 x 之變異數（variance）為何？

(A) $1/\sqrt{6}$　(B) $2/3$　(C) $1/6$　(D) $\sqrt{2/3}$

18 有兩個連續的隨機變數 X 與 Y，它們的合併機率密度函數（joint probability density function）為：

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}A\cdot x\cdot y^{2}, \text{if } 0<x<1 \text{ and } 0<y<1\\ 0, \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 A 為常數。請問隨機變數 X 的期望值（expectation）為下列何者？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{4}{5}$

19 假設我們有一個不公平（unfair）的銅板，在每次投擲中出現正面的機率為 0.4，出現反面的機率為 0.6。如果我們丟擲這個銅板 5 次，結果出現正面比出現反面還更多次的機率為何？（請在下列選項中選出最接近答案的數值。）

(A) 0.1　(B) 0.2　(C) 0.3　(D) 0.4

20 請問 i^{2i} 的主值（principal value）為何？

(A) 0　(B) $-i$　(C) $e^{i\pi}$　(D) $e^{-\pi}$