109年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間： 2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、假設 X 和 Y 為兩個獨立（independent）的隨機變數（random variables），且 X 和 Y 之平均值（mean）均為零，變異數（variance）為σ^2的高斯分布（Gaussian distribution）。隨機變數 X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint pdf）為：

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right],\quad -\infty<x,y<\infty \text{。}$$

定義兩個新的隨機變數R及Θ如下：假設$R=\sqrt{X^2+Y^2}$及$\Theta=\tan^{-1}(Y/X)$，使得$X=R\cos\Theta$，且$Y=R\sin\Theta$。請證明隨機變數R的機率密度函數為

$$f_R(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right],\quad 0\le r<\infty$$ 。（6分）

二、㈠假設 z 為一複數，求所有的 z 使得$\cos z=\sqrt{2}$。（4分）

㈡假設 z 為一複數，計算$\oint_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2}dz$，其中積分路徑 C 為圓$|z-2|=4$之順時針（clockwise）方向圓周（circle）。（4分）

三、㈠已知一 RC 電路系統可由微分方程式（differential equation）$\frac{d}{dt}y(t)+5y(t)=5x(t)$表示，其中 $x(t)$為輸入，且 $y(t)$為輸出。假設$x(t)=(3/5)e^{-2t}u(t)$，且初始條件（initial condition）$y(0^-)=-2$，求 $y(t)$。（8分）

㈡已知一訊號 $x(t)$的單邊拉普拉斯轉換（unilateral Laplace transform）為：

$$X(s)=e^{-2s}\frac{2s^2+1}{s(s+2)^2}$$

請求該訊號 $x(t)$的初值（initial value）及終值（final value）。（8分）

四、㈠⒜求 k 使得 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\3&2&1&4\\2&6&10&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\\k\end{pmatrix}$；（7分）

⒝如⒜小題，求矩陣 $\mathbf{A}$ 的行列式值（determinant）。（3分）

㈡請求以下線性系統的解 $\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-2x_2+3x_3\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2+x_3\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+3x_2-x_3\end{cases}$，其中 $x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$ 及 $x_3(0)=1/2$。（10分）

乙、測驗題部分：（50分）　　　　代號：7343

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出<u>一個</u>正確或最適當的<u>答案</u>，<u>複選</u>作答者，該題<u>不予計分</u>。

㈡共20題，每題2.5分，須用<u>2B鉛筆</u>在試卡上依題號<u>清楚</u>劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 對稱矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\2&0&4\end{pmatrix}$，其對角化矩陣（diagonal matrix）$\mathbf{D}=\mathbf{PAP}^{-1}$，其中 $\mathbf{P}$ 是正交矩陣，求 $\mathbf{D}=$？

(A) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

2 矩陣 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，令 $\det\mathbf{A}=6$ 和 $\det\mathbf{B}=2$，求 $\det\mathbf{AB}^{-1}=$？

(A)12　(B)6　(C)3　(D)0

3 設 $\mathbf{a}$ 為常數向量（constant vector），$\mathbf{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$，下列何者錯誤？

(A) $\nabla\cdot\mathbf{r}=3$　(B) $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=0$

(C) $\nabla\times\mathbf{r}=0$　(D) $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=\mathbf{a}$

4 求 $\int_{(1,1)}^{(2,4)}2xydx+x^2dy=$？

(A)10　(B)15　(C)20　(D)25

5 矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，求 $e^{\mathbf{A}t}=$？

(A) $\begin{pmatrix}2e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}e^t&0\\0&2e^{-t}\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2e^t&0\\0&2e^{-t}\end{pmatrix}$

6 下列矩陣何者的秩（rank）等於2。

(A)$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

7 下列那一個是適合的積分因子（integrating factor），乘上它以後，將使微分方程式$(x+y)dx+xln(x)dy=0$變成正合（exact）？

(A)x (B)3 (C)$\frac{1}{x}$ (D)$\frac{1}{x^2}$

8 微分方程式$y''-6y'+9y=t^2e^{3t}$，其中$y(0)=2,\ y'(0)=6$。以拉普拉斯轉換（Laplace transform）求解後得到$Y(s)=\frac{2(s-c)^d+2}{(s-a)^b}$，則下列何者錯誤？

(A)$a+b+c+d=15$ (B)$a+b+c-d=7$ (C)$a-b-c+d=-1$ (D)$-a+b-c+d=-3$

9 設$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$為函數$f(x)=x^3$，$-\pi<x<\pi$之傅立葉級數（Fourier series），其中$a_0,\ a_n,\ b_n$為常數，下列何者正確？

(A)$a_0+b_n\neq 0$ (B)$a_0+a_n\neq 0$ (C)$a_0\cdot b_n\neq 0$ (D)$a_0\neq 0$

10 設$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$為微分方程$y'''+ay''+by'+cy=0$的通解（general solution），其中$a,b,c,c_1,c_2,c_3$為常數，下列何者正確？

(A)$a=-1$ (B)$b=-1$ (C)$c=-1$ (D)$a+b+c=-1$

11 求積分方程$f(t)=\cos t+\int_0^t e^{-\tau}f(t-\tau)d\tau$的解。

(A)$1-\sin t$ (B)$1+\sin t$ (C)$\cos t-\sin t$ (D)$\cos t+\sin t$

12 令連續隨機函數X具有機率密度函數$f(x)=\begin{cases} kx^2, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$，求其變異數（variance）$\sigma^2$。（其中$k$為常數）

(A)$\frac{1}{40}$ (B)$\frac{3}{40}$ (C)$\frac{1}{80}$ (D)$\frac{3}{80}$

13 令連續二維隨機變數 X 和 Y 具有機率密度函數$f(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0\le x\le 1 \text{ and } 0\le y\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$，求其機率$P(X>0.25,Y>0.5)$。（其中 k 為常數）

(A) $\frac{5}{8}$　(B) $\frac{9}{16}$　(C) $\frac{45}{64}$　(D) $\frac{75}{128}$

14 求複變函數積分$\oint_C\left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3}-\frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3}\right)dz$，其中積分路徑$C$為逆時鐘方向繞圓周$|z|=3$。

(A) $\frac{\pi}{4}i$　(B) $-\frac{\pi}{4}i$　(C) $\frac{\pi}{2}i$　(D) $-\frac{\pi}{2}i$

15 求複變函數積分$\oint_C\frac{z}{(z+1)(z^2+1)}dz$，其中積分路徑$C$為逆時鐘方向繞橢圓周$16x^2+y^2=4$。

(A)$2\pi i$　(B)$-2\pi i$　(C)πi　(D)$-\pi i$

16 複變函數$f(z)=z^{24}-3z^{20}+4z^{12}-5z^6$，求$f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=$？

(A)$5i$　(B)$4i$　(C)$3i$　(D)$2i$

17 z 為一複數，若 Γ 是平面中一個包含原點 z=0之封閉路徑，$\oint_\Gamma\frac{\cos(z)}{z}dz=$？

(A)0　(B)$-i2\pi$　(C)2π　(D)$i2\pi$

18 曲線 C 為平面上一個正向簡單封閉路徑，則$\oint_C x\cos(2y)dx-x^2\sin(2y)dy=$？

(A)$4x\sin(2y)$　(B)$2x\sin(2y)$

(C)0　(D) $\frac{1}{2}\left(x^2\cos(2y)+x^2\cos(2y)\right)$

19 令一曲線 C 為 $x=t^2,\ y=-t,\ z=t^2,\ 0\le t\le 1$，則$\int_C x^2dx-yzdy+e^zdz=$？

(A) $e+\frac{1}{12}$　(B) $e-\frac{1}{12}$　(C) $e-\frac{11}{12}$　(D) $e+\frac{11}{12}$

20 下表所示為 x 及 y 機率質量函數（probability mass function, PMF），則 X 與 Y 之共變異數 $COV(X,Y)=$？

	x_1=1	x_1=0	x_1=−1
y_1=1	0	1/4	1/4
y_2=−1	1/4	1/4	0

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C)-1　(D)1