

113年公務人員特種考試關務人員、身心障礙人員考試及  
113年國軍上校以上軍官轉任公務人員考試試題

考試別：身心障礙人員考試

等別：三等考試

類科：電力工程

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、考慮下列微分方程式：

$$2x \cdot \cos(3y) - 3x^2 \cdot \sin(3y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

- (一)請證明這是一個正合 (exact) 的微分方程式。(5分)
- (二)請求取此微分方程式的一般解 (general solution)。(10分)
- (三)針對此微分方程式，再加上初始條件： $y(1) = 0$ 。請求取  $y(x)$  的精確解 (exact solution)。(5分)

二、考慮下列矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- (一)請證明矩陣  $A$  為可逆 (invertible)。(5分)
- (二)請計算矩陣  $A$  的行列式 (determinant)。(5分)
- (三)請求取矩陣  $A$  的反矩陣 (inverse matrix)。(10分)
- (四)如果用  $B$  代表矩陣  $A$  的反矩陣，則  $B^4$  的行列式數值為何？(10分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：4311

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆 在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \end{bmatrix}$ ，則矩陣  $A$  的秩  $\text{rank}(A)$  為何？

- (A) 5                      (B) 4                      (C) 3                      (D) 2

2 下列何者為二階常微分方程式  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$  的解 ( $c_1, c_2$  為任一實數 (real values)) ？

- (A)  $y = c_1x^{-1} + c_2x^3$     (B)  $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-3}$     (C)  $y = c_1x + c_2x^3$     (D)  $y = c_1x + c_2x^{-3}$

3 令  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  為一個線性映射函數，其定義為  $T(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$ ，則下列何者錯誤？

- (A) 函數  $T$  之零核空間 (null space) 的維度為 0  
(B) 函數  $T$  的秩 (rank) 為 2  
(C) 函數  $T$  為一對一函數  
(D) 函數  $T$  之列空間 (row space) 的維度為 0

4 令矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$  為一斜對稱矩陣 (skew symmetric matrix)，其中

$a, b, c$  為實常數，則下列何者錯誤？

- (A)  $a = 2$                       (B)  $a, b$  兩數乘積  $ab = 6$   
(C)  $a, c$  兩數乘積  $ac = -6$                       (D)  $b, c$  兩數乘積  $bc = 9$

5 若矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ ，則其行列式  $\det(A)$  為何？

- (A)  $x^3(10+x)$       (B)  $x^3(10+4x)$       (C)  $24(10+x^4)$       (D)  $30(10+4x^4)$

6 下列何者不是矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  的特徵向量/固有向量 (characteristic vector/eigenvector) ？

- (A)  $I = [-1 \ 1 \ 1]^T$       (B)  $J = [-1 \ -1 \ 1]^T$   
(C)  $K = [1 \ 1 \ 1]^T$       (D)  $L = [1 \ -1 \ 1]^T$

7 下列給定的矩陣，何者不可對角化？

(A)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$       (B)  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$       (C)  $C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$       (D)  $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

8 空間  $\mathbf{R}^3$  中的四點  $A(1, 0, 1)$ 、 $B(2, x, 4)$ 、 $C(5, 5, 7)$  與  $D(8, 8, 10)$  共平面，則  $x$  為何？

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

9 微分方程式  $(y + x^3)dx = xdy$  滿足  $y(1) = 2$  的解為  $y = ax^3 + bx^c$ ，其中  $a, b, c$  為實常數，則下列何者正確？

- (A)  $a = 1$       (B)  $b = \frac{1}{2}$       (C)  $c = 2$       (D)  $c = 1$

10 令週期函數  $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ ， $f(x) = f(x+2)$ ，其傅立葉級數

(Fourier series) 展開為  $f(x) = \frac{4}{\pi} (\dots + a \sin(\pi x) + b \sin(2\pi x) + c \sin(3\pi x) + d \sin(4\pi x) + \dots)$ ，其中  $a, b, c, d$  為實常數，則  $a+b+c+d$  之值為何？

- (A)  $\frac{-4}{3}$       (B)  $\frac{4}{3}$       (C)  $\frac{1}{3}$       (D)  $\frac{-1}{3}$

- 11 若使 $(4x^2y - 3xy^2)dx + (x^3 - 2x^2y)dy = 0$  為正合 (exact) 的積分因子為  $x^m y^n$ ，其中  $m$  與  $n$  皆為實數，則  $m+n$  之值為何？
- (A) -2                      (B) -1                      (C) 1                      (D) 2
- 12 下列各組函數，何者不為線性獨立 (linearly independent) ？
- (A)  $e^x$ 、 $e^{-x}$ 、 $e^{2x}$ ， $-\infty < x < \infty$                       (B)  $\ln x$ 、 $\ln x^2$ 、 $\ln x^3$ ， $0 < x < \infty$
- (C)  $1$ 、 $x$ 、 $x^2$ ， $-\infty < x < \infty$                       (D)  $1$ 、 $\cos x$ 、 $\sin x$ ， $-\infty < x < \infty$
- 13 微積分式  $y'(t) = \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$ ， $y(0) = 1$  之解為何？
- (A)  $y(t) = \sin t + \frac{t}{2}$                       (B)  $y(t) = \sin t + \frac{t^2}{2}$
- (C)  $y(t) = 1 + \frac{t}{2}$                       (D)  $y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$
- 14 複變函數  $f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)^2(z+4)}$ ，若  $C$  為逆時針方向繞圓周  $|z|=3$  的路徑，則下列何者是積分  $\oint_C f(z) dz$  之值？
- (A)  $\frac{-1}{8} \pi i$                       (B)  $\frac{1}{8} \pi i$                       (C)  $\frac{-1}{24} \pi i$                       (D)  $\frac{1}{24} \pi i$
- 15 複變函數  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ，針對區域  $1 < |z| < 2$  對函數  $f(z)$  展開可得  $f(z) = \dots + az^{-2} + bz^{-1} + c + dz + \dots$ ，其中  $a, b, c, d$  為實常數，則下列何者正確？
- (A)  $a = 1$                       (B)  $b = -1$                       (C)  $c = \frac{1}{2}$                       (D)  $d = \frac{1}{4}$
- 16 下列複變函數何者不滿足柯西-黎曼方程式 (Cauchy-Riemann equation) 而為不可解析函數 (極點除外) ？ (其中  $z = x + iy, i = \sqrt{-1}$ )
- (A)  $f(z) = e^{-x} \cos(y) - ie^{-x} \sin(y)$
- (B)  $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$
- (C)  $f(z) = 3\pi^2 / (z^3 + 4\pi^2 z)$
- (D)  $f(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$

