

等 別：高考二級
類 科：電力工程
科 目：控制系統
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。
(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(三)請以黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
(四)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、有一線性非時變系統之動態方程式如下所示：

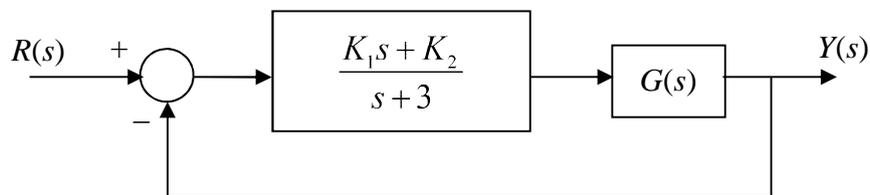
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a & b \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \quad -1] \mathbf{x}(t)$$

且系統狀態之初值為 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ 。

(一)令 a 、 b 、 α 與 β 為給定之常數，並利用拉普拉斯轉換 (Laplace transformation) 之技術可求得 $Y(s) = H(s)U(s) + G(s)$ ，其中 $U(s)$ 與 $Y(s)$ 分別為輸入 $u(t)$ 與輸出 $y(t)$ 的拉普拉斯轉換式，試求出 $H(s)$ 及 $G(s)$ 。(16分)

(二)若 $\alpha = 1$ 與 $\beta = 0$ ，且系統輸入為 $u(t) = 1, t \geq 0$ ，若所求得之輸出可表示為 $Y(s) = \frac{J(s)}{s(s^2 + 5s + 3)}$ ，試求出 a, b ，與 $J(s)$ 。(9分)

二、已知一閉迴路系統方塊圖如下圖所示：



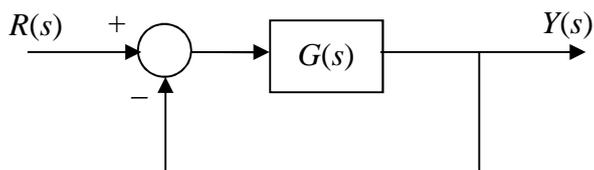
其中 $G(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$ 且 $Y(s) = H(s)R(s)$ 。

(一)求 $H(s) = ?$ (9分)

(二)若此閉迴路系統為穩定，且有一特徵根為 -1 時，則 K_1 與 K_2 之關係式為何？(8分)

(三)於(二)條件下， K_2 之範圍為何？(8分)

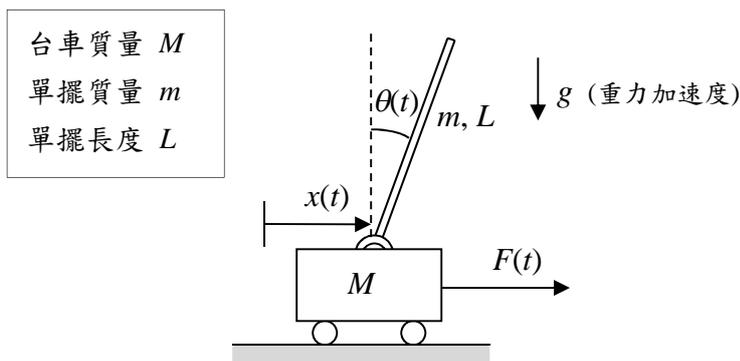
三、已知一單位負回授系統之方塊圖如下圖所示：



其中 $G(s) = K \frac{s-2}{s^2+2s+2}$ ， $0 \leq K < \infty$ 。

- (一)請畫出根值軌跡圖 (root locus plot)，並標示極點與零點。(5分)
- (二)在極點上的離開角 (departure angle) 為何？(5分)
- (三)根值軌跡進入實軸之分離點 (break-in point) 為何？(5分)
- (四)此分離點所對應的 $K=?$ (5分)
- (五)閉迴路系統穩定時， K 值範圍為何？(5分)

四、考慮一倒立單擺，如下圖所示：



其中 $x(t)$ 為台車的位置， $\theta(t)$ 為單擺的旋轉角度， $F(t)$ 為推動台車的外力。當 $\theta(t)$ 很小時，其動態方程式可表為

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}(t) + \frac{1}{2}mL\ddot{\theta}(t) = F(t) \\ \frac{1}{2}mL\ddot{x}(t) + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}(t) - \frac{1}{2}mgL\theta(t) = 0 \end{cases}$$

為了利用外力 $F(t)$ 將此倒立單擺控制在垂直角度 $\theta(t)=0$ ，通常將此動態方程式簡化為下列之微分方程式： $\ddot{\theta}(t) + a_1\dot{\theta}(t) + a_2\theta(t) = bF(t)$ ，其中輸入為 $F(t)$ ，各常數係數 a_1 、 a_2 、 b 可由 M 、 m 、 L 、 g 來表示。

- (一)請利用 M 、 m 、 L 、 g 來表示 a_1 ， a_2 ，與 b 。(9分)
- (二)當 $F(t)=0$ ，即在無外力之情況下，請根據 a_1 與 a_2 來判斷系統是否穩定，並說明理由。(6分)
- (三)為了控制單擺至垂直角度 $\theta(t)=0$ ，設計 $F(t) = k_1\theta(t) + k_2\dot{\theta}(t)$ 來達到控制目標，若受控後之系統穩定特徵根為 α 與 β ，請利用 a_1 、 a_2 、 b 、 α 、 β 來表示 k_1 與 k_2 。(10分)